# Beiträge zur zirkulären Statistik

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der
Universität Zürich

von
VASSILIOS PAPAKONSTANTINOU
aus Arkadien (Griechenland)

begutachtet von Herrn Professor Dr. E. Batschelet

Zürich 1979
Zentralstelle der Studentenschaft

# Beiträge zur zirkulären Statistik

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der
Universität Zürich

von
VASSILIOS PAPAKONSTANTINOU
aus Arkadien (Griechenland)

begutachtet von Herrn Professor Dr. E. Batschelet

Zürich 1979
Zentralstelle der Studentenschaft

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Νίκη

Inhalt

1. Einleitung

2. Verteilungsfunktion von r

3. Numerische Werte der Verteilung

4. Ein Mehrstichprobentest

5. Modelle für Schiefe und Kurtosis

6. Korrelationen auf dem Torus

7. Schlussbemerkungen

8. Literaturverzeichnis

9. Anhang: Tabellen und Figuren

## 1. Einleitung

Die beste Einführung in die zirkuläre Statistik bietet das Buch von Mardia (1972) [M]: "Statistics of Directional Data". Die beste Motivation für das Studium der zirkulären Statistik und ihrer Anwendungen in der Biologie bietet die Monographie von Batschelet (1965) [B]: "Statistical Methods for the Analysis of Problems in Animal Orientation and certain Biological Rhythms". Die zirkuläre Statistik beschäftigt sich mit Problemen, welche periodischen Charakter haben und auf den Kreis abgebildet werden können.

Die zwei zitierten Bücher über zirkuläre Statistik sind nicht nur die ersten über dieses Gebiet, sondern bisher die einzigen. Darüber hinaus gibt es ein knappes, elementares Kapitel in einem Lehrbuch der Biometrie von Zar 1974 [JZ]. Dies ist ein untrügliches Zeichen dafür, dass dieses Gebiet verhältnismässig neu und noch keineswegs abgeschlossen ist.

Es gibt viele ungelöste theoretische Fragen, sowie auch Probleme, die sich aus dem direkten Kontakt mit den Anwendungen ergeben. Einige theoretische Probleme zeigt der folgende Gedankengang auf: Beim Versuch, alle Begriffe, Definitionen und Methoden der linearen Statistik, d.h. der Statistik auf der reellen Achse, in die zirkuläre Statistik zu übertragen, erkennen wir, dass dies in vielen Fällen mit grössten Schwierigkeiten verbunden ist.

Zunächst ist es ein empfindlicher Mangel, dass es in der Literatur keine Tafeln für die Verteilung des Betrages des mittleren Vektors einer zirkulären Verteilung gibt (ausser im Spezialfall der uniformen Verteilung). Zwar kann man die Verteilungsfunktion durch ein Doppelintegral theoretisch hinschreiben. Doch sind verschiedene Autoren an der numerischen Auswertung gescheitert. Im Kapitel 2 zeigen wir, wie das Integral so umgeformt werden kann, dass es mit erträglichem Aufwand numerisch auszuwerten ist. Auch so noch ist der Rechenaufwand sehr gross und die Durchführung nur auf einer besonders schnellen Maschine möglich.

Im Kapitel 3 diskutieren wir die verwendeten numerischen Methoden und schätzen die Fehler ab.

In praktischen Anwendungen muss man oft mehrere Stichproben simultan vergleichen. Für zirkuläre Verteilungen sind Mehrstichprobentests nur für spezielle Fälle erhältlich, insbesondere für drei Stichproben.
Im Kapitel 4 geben wir einen neuen Test, der einige Vorteile vor den schon bekannten bietet. Erstens ist die Zahl der Stichproben nicht beschränkt. Zweitens hat der Test die Form einer Prüfmethode "zweiter Ordnung", wie dies von den Anwendungen her nahegelegt wird. Wir illustrieren den neuen Test an zwei Beispielen aus der Praxis.

In ganz anderer Richtung stösst der Inhalt von Kapitel 5 vor. Hier geht es um zirkuläre Verteilungen, die entweder in der Kurtosis oder in der Schiefe von der symmetrischen von Mises Verteilung abweichen. Für solche Verteilungen besteht ein gewisser Bedarf,

der bis jetzt nicht befriedigt werden konnte. Gleichzeitig können die Formelausdrücke zur Darstellung periodischer Funktionen verwendet werden, wie sie im Zusammenhang mit biologischen Rhythmen vorkommen.

Schliesslich beschäftigen wir uns auch noch mit zirkulärer Korrelation. Wir weisen im Kapitel 6 nach, dass zwei in der Literatur unabhängig voneinander vorgeschlagene Korrelationskoeffizienten mathematisch äquivalent sind.

## 2. Verteilungsfunktion von r

### 2.0 Allgemeines

Ausgangspunkt für unsere Untersuchungen ist eine Zufallsstichpro

2.0.1 $$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$$

vom Umfang N aus einer Gesamtheit, die durch ein stetiges zirkuläres Gesetz charakterisiert wird. Aus diesen N unabhängigen Zufall winkeln bilden wir in der Ebene N Einheitsvektoren in kartesischen und in Polarkoordinaten:

2.0.2 $$\underline{V}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i) \quad \text{bzw.} \quad \underline{V}_i = (1, \theta_i)$$

$$i = 1,2,\ldots,N \ .$$

Eine wichtige Stichprobenfunktion in der ganzen Theorie der zirkulären Statistik ist der resultierende Vektor

2.0.3 $$\underline{R} = (R, \bar{\theta}) \ ,$$

welcher wie folgt aus den N-Zufallsvektoren $\underline{V}_i$ gebildet wird.

Mit Hilfe der Grössen C und S

2.0.4 $$C = \sum_{i=1}^{N} \cos \theta_i \ , \quad S = \sum_{i=1}^{N} \sin \theta_i$$

definieren wir die Länge R des resultierenden Vektors

2.0.5 $$R = \sqrt{C^2 + S^2}$$

und die mittlere Richtung $\bar{\theta}$ als eindeutige Lösung der Gleichungen

2.0.6 $$C = R \cos \bar{\theta} \ , \quad S = R \sin \bar{\theta} \ ,$$

sofern $R \neq 0$ ist.

Als Mass für die Konzentration um die mittlere Richtung $\bar{\theta}$ wird in der statistischen Analyse der Richtungen die Länge des mittleren Vektors, r , benützt:

2.0.7 $$r = R/N \ .$$

Aus der Definition von $R$ bzw. $r$ folgt, dass

2.0.8 $\quad 0 \leq R \leq N$ bzw. $0 \leq r \leq 1$

gilt, und dass $R$ bzw. $r$ invariant gegenüber Drehungen des Koordinatensystems sind.

## 2.1 Die von Mises Verteilung

Sowohl die theoretischen als auch die praktischen Probleme haben gezeigt, dass die von Mises Verteilung das wichtigste unimodale Modell in der zirkulären Statistik ist. Darum nehmen wir an, dass die Grundgesamtheit, aus der die Stichprobe 2.0.1 entnommen ist, durch eine von Mises Verteilung beschrieben werde.

Die zwei parametrige Dichtefunktion

$$2.1.1 \qquad g(\theta,\theta_o,\kappa) = \frac{1}{2\pi I_o(\kappa)} \cdot \exp(\kappa \cos(\theta-\theta_o))$$

$$0 < \theta \leq 2\pi$$

mit den Parametern $\kappa$ , $\theta_o$

$$\kappa > 0 \ , \quad 0 \leq \theta_o < 2\pi$$

charakterisiert die von Mises Verteilung. Die Normierungsfunktion $I_o(x)$ ist die modifizierte Besselfunktion erster Art der Ordnung Null. Im Hinblick auf die späteren Anwendungen geben wir die allgemeine Definition der modifizierten Besselfunktionen an:

$$2.1.2 \qquad I_n(x) = (\frac{x}{2})^n \cdot \sum_{s=o}^{\infty} \frac{1}{s!\,\Gamma(s+n+1)} \cdot (\frac{x}{2})^{2s} \ , \ n \in Z \ .$$

Der Parameter $\theta_o$ ist die mittlere Richtung. Ohne an Allgemeinheit zu verlieren, werden wir $\theta_o = 0$ annehmen. Die Grösse $\kappa$ wird als Konzentrationsparameter bezeichnet. Im Grenzfall, in dem

$$\kappa = 0$$

wird, erhalten wir die uniforme Verteilung auf dem Kreis mit der Dichte

2.1.3 $$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} , \quad 0 < \theta \leq 2\pi .$$

Unser statistisches Mass für die Konzentration $r$ entspricht dem wahrscheinlichkeitstheoretischen Mass für Konzentration $\varrho$, welches durch die Beziehung

2.1.4 $$\varrho = I_1(\kappa)/I_0(\kappa)$$

mit dem Konzentrationsparameter $\kappa$ der von Mises Verteilung verknüpft ist. (Mardia 1972, S. 62)
Dieser Zusammenhang zwischen $r$ und $\varrho$ erklärt das Interesse an $r$ und an seiner Verteilung.

## 2.2 Die Verteilungsfunktion von r

Wir bleiben im Modell der von Mises Verteilung mit der Dichte 2.1.1 und versuchen, die Verteilung von $R$ bzw. $r$ zu berechnen. Dieses Problem datiert von 1905, als Pearson [P] Zufallswege studierte. Rayleigh ist von anderer Problematik auf zufällige Einheitsvektoren gekommen und hat eine asymptotische Formel für den Grenzfall der uniformen Verteilung, d.h. für $\kappa = 0$ gefunden.
Kluyver [K] hat 1906 die exakte Verteilungsfunktion von $R$ für $\kappa = 0$ gefunden. Seine Lösung

2.2.1 $$P(\tilde{R} < R|N) = R \cdot \int_0^\infty [J_0(x)]^N J_1(Rx)\,dx , \quad 0 \leq R \leq N$$

ist jetzt als Kluyvers Integral bekannt.

$J_n(x)$ sind die Besselfunktionen:

2.2.2 $$J_n(z) = (\frac{z}{2})^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \cdot (\frac{z}{2})^{2k} , \quad n \in Z .$$

J.A.Greenwood und D. Durand 1955 [GD] haben eine Formel für die Dichtefunktion von $R$ für $\kappa \neq 0$ gefunden.

Mardia 1972 [M] hat in seinem Buch die Herleitung der Dichtefunktion von $R$ für alle $\kappa$ auf den Seiten 83 bis 97 zusammengestellt, und etwas kompaktere Beweismethoden benützt.

Wir übernehmen das bisher bekannte Resultat, wie es Mardia auf Seite 97, Formel 4.5.6 angibt und werden weiterrechnen.

Dichtefunktion von $R$ :

$$2.2.3 \qquad f(R) = \frac{1}{(I_0(\kappa))^N} \cdot I_0(\kappa R) \cdot R \cdot \int_0^\infty x\, J_0(Rx) \cdot J_0^N(x)\, dx \ , \quad 0 \leq R \leq N \ .$$

Die Integration der Dichte 2.2.3 gibt uns sofort die Verteilungsfunktion von $R$ :

$$2.2.4 \qquad P(\tilde{R} < R \mid N,\kappa) =: F(R,N,\kappa) = \int_0^R f(y)\, dy \ , \quad 0 \leq R \leq N \ .$$

Wir behaupten jetzt, dass die Verteilungsfunktion von $R$ (2.2.4) wie folgt umgeformt werden kann:

$$2.2.5 \qquad F(R,N,\kappa) = R \cdot \frac{I_0(\kappa R)}{(I_0(\kappa))^N} \cdot \int_0^\infty \frac{x}{x^2+\kappa^2} \cdot J_0^N(x) \cdot \left[ \kappa \frac{I_1(\kappa R)}{I_0(\kappa R)} \cdot J_0(xR) + x\, J_1(xR) \right] dx$$

$$0 \leq R \leq N \ , \quad \kappa \geq 0 \ , \quad N \in \mathbb{N}$$

## 2.3 Beweis der Formel 2.2.5

Für $\kappa = 0$ erhalten wir sofort das Kluyver Integral 2.2.1.

Um für $\kappa \neq 0$ 2.2.5 zu zeigen, gehen wir von der Formel 2.2.4 aus:

$$2.3.1 \qquad F(R,N,\kappa) = \frac{1}{I_0^N(\kappa)} \int_0^R I_0(\kappa y)\, y \int_0^\infty x\, J_0(xy)\, J_0^N(x)\, dx dy \ , \quad 0 < R < N \ .$$

Nach Fubini (C. Blatter[CB] III S. 59) vertauschen wir die Integrationen

$$2.3.2 \qquad F(R,N,\kappa) = \frac{1}{I_0^N(\kappa)} \cdot \int_0^\infty x\, J_0^N(x) \cdot \int_0^R y\, I_0(\kappa y)\, J_0(xy)\, dy dx \ .$$

Nun können wir sogar das endliche Integral analytisch berechnen.

$$2.3.3 \qquad E = \int_0^R y\, I_0(\kappa y) \cdot J_0(xy)\, dy \ .$$

Wenn wir die Beziehung

$$2.3.4 \qquad I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$$

zwischen den Besselfunktionen benützen, wird 2.3.3 zu

$$2.3.5 \qquad E = \int_0^R y\, J_0(i\kappa y) J_0(xy)\, dy \ ,$$

mit den Substitutionen

$$\alpha = i\kappa$$

$$\beta = x$$

wird 2.3.5 zu

$$2.3.6 \qquad E = \int_0^R y\, J_0(\alpha y) J_0(\beta y)\, dy \ .$$

Das Integral 2.3.6 ist seit 1895 für $\alpha,\beta \in R$ bekannt. A. Gray and G.B. Mathews [GM], Seite 52.

Im Zusammenhang mit Orthogonalitätseigenschaften der Besselfunktionen kann mit Hilfe der Differentialgleichung gezeigt werden, dass eine Lösung von 2.3.6 auch für Imaginäre $\alpha,\beta$ existiert. Dazu benützen wir die Formel von Lawrentjew-Schabat [LS], welche eine Lösung des allgemeineren Integrals

$$2.3.7 \qquad \int_0^A t\, J_\lambda(\alpha t) J_\lambda(\beta t)\, dt \ , \quad \lambda \in R$$

ist.

Die Lösung von 2.3.7 lautet:

$$2.3.8 \qquad \int_0^A t\, J_\lambda(\alpha t) J_\lambda(\beta t)\, dt = \frac{A}{\beta^2 - \alpha^2} \cdot [\alpha J'_\lambda(\alpha A) J_\lambda(\beta A) - \beta J_\lambda(\alpha A) J'_\lambda(\beta A)]$$

Mit 2.3.8 und der bekannten Beziehung

$$2.3.9 \qquad J'_0(z) = -J_1(z)$$

wird 2.3.3 zu

2.3.10 $$E = \frac{R}{x^2+\kappa^2}\left[- i\kappa J_1(i\kappa R) J_o(xR) + x J_o(i\kappa R) J_1(xR)\right] .$$

Schliesslich setzen wir 2.3.4 nochmals in 2.3.10 ein:

2.3.11 $$E = \frac{R}{x^2+\kappa^2}\left[\kappa I_1(\kappa R) J_o(xR) + x I_o(\kappa R) J_1(xR)\right]$$

und erhalten die behauptete Formel 2.2.5.

## 3. Numerische Werte der Verteilung

Zunächst haben wir versucht, das Doppelintegral 2.2.4 mit Hilfe des ETH-Computers zu berechnen. Weil alle Berechnungsversuche ergebnislos verliefen, konzentrierten wir uns eine zeitlang auf analytische Methoden. Nachdem es uns gelungen ist, ein Integral analytisch zu berechnen, benützten wir nochmals den ETH-Computer, um die einfachere Formel 2.2.5 zu berechnen.

Die Besselfunktionen haben wir durch Polynome ersetzt, welche eine minimale Genauigkeit von 6 Kommastellen lieferten. Diese Polynome haben wir von E.E. Allen [EA] übernommen. Wir haben die Integrationsmethoden von Archimedes-Romberg [B,R,S], [S] und von Gauss [SOS] benützt.

Um die numerische Integration zu prüfen haben wir den bekannten Wert

für $R = N$

berechnet. Für $R = N$ gilt:

$$P(R \leqslant N | \kappa) = P(R \leqslant N)$$
$$= F(N,N,\kappa)$$
$$= 1 \ .$$

Die Gauss-Methode mit 16 Stützstellen, welche wir programmiert haben, ist viermal schneller als die Romberg-Methode. In der Testphase haben wir nur die Romberg Integration benützt, weil diese flexibler ist. Bei der Produktion der Tafeln haben wir beide Methoden angewendet, denn mit entsprechendem Rechenzeitaufwand wird die gleiche Genauigkeit erreicht.

### 3.1 Fehlerabschätzungen

Es sind zwei wesentliche Fehlerquellen bei der numerischen Inte-

gration der Formel 2.2.5 von Bedeutung:

A) Das Ersetzen der unendlichen oberen Integrationsgrenze durch eine endliche Grenze $A$ .

B) Das Restglied der Integrationsformel.

Untersuchung der Fehlerquelle A)

Seien

$$c_o = R \cdot \frac{I_o(\kappa R)}{I_o(\kappa)^N} \quad ,$$

3.1.1 $$c_1 = \kappa \cdot \frac{I_1(\kappa R)}{I_o(\kappa R)} \leqslant \kappa \quad ,$$

$$g(x) = \frac{x}{x^2+\kappa^2} \cdot J_o^N(x) \cdot [c_1 \cdot J_o(xR) + xJ_1(xR)] \quad ,$$

dann wird 2.2.5 zu

$$F(R) = c_o \int_o^\infty g(x)\,dx$$

3.1.2

$$= c_o \int_o^A g(x)\,dx + c_o \int_A^\infty g(x)\,dx \quad .$$

Das zweite Integral schätzen wir ab, mit Hilfe der folgenden Schranken für die Besselfunktionen. Nach Abramowitz [A], Seite 369, Formel 9.4.3 ist:

$$J_o(x) = \frac{1}{x^{1/2}} \cdot f_o(x) \cdot \cos\,\theta_o(x) \quad , \; x \geqslant 3 \quad ,$$

3.1.3 $$|f_o(x)| < 0{,}8 \rightarrow$$

$$|J_o(x)| < \frac{0{,}8}{x^{1/2}} \quad (x > 3) \quad .$$

Ebenfalls nach [A], Seite 370, Formel 9.4.6 ist:

$$J_1(x) = \frac{1}{x^{1/2}} \cdot f_1(x) \cdot \cos\,\theta_1(x) \quad , \; x \geqslant 3 \quad ,$$

3.1.4 $$|f_1(x)| < 0{,}8 \quad \text{für} \quad x \geqslant 10$$

$$\rightarrow |J_1(x)| < \frac{0{,}8}{x^{1/2}} \quad , \quad x > 10 \quad .$$

Durch Einsetzen von 3.1.1 und 3.1.4 in $g(x)$ erhalten wir

3.1.5 $$|g(x)| < \frac{2 \cdot 0{,}8^{N+1}}{R^{1/2}} \cdot x^{-(N+2)/2} \quad , Rx > 10 \ , \ \kappa \leq 10 \ .$$

Für $A > 10$ erhalten wir für das Restintegral:

3.1.6 $$\int_A^{\infty} |g(x)| \, dx < \frac{4}{N \cdot A^{N/2}} \ , \ N > 1 \ , \ R \geq 1 \ , \ \kappa \leq 10 \ .$$

Das rasche Abklingen des Restintegrals 3.1.6 mit wachsendem $A$ war eine sehr grosse Hilfe bei der numerischen Integration. Für jedes Parameterpaar

3.1.7 $(\kappa, N)$

haben wir die obere Integrationsgrenze $A$ optimiert. Zum Beispiel

für $\kappa = 10 \ , \ N = 3$

mussten wir $A = 220$

wählen, und für $\kappa = 0 \ , \ N = 20$

genügte schon $A = 6$ .

Für alle Parameterwerte von

3.1.8 $$\kappa \in (0,10)$$
$$N \in (3,30)$$

varierte $A$ im Intevall

3.1.9 $$A \in (6,220) \ .$$

Das Integral haben wir nochmals im folgenden Sinne zerlegt

$$\int_0^A g(x)\,dx = \int_0^{\ell} g(x)\,dx + \int_{\ell}^{2\ell} g(x)\,dx + \ldots + \int_{A-\ell}^{A} g(x)\,dx \ , \quad 0{,}3 \leq \ell \leq 1$$

Untersuchung der Fehlerquelle B)

Nach Stiefel [S] ist das Restglied der Archimedes-Romberg Integrationsmethode gleich:

3.1.10 $R_m = C \cdot g^{(2m+2)}(\xi)$ .

$2^m$ ist die Anzahl Stützstellen im Integrationsintervall, $\xi$ ist irgendein (unbekannter!) Wert im Integrationsintervall, d.h.

$$0 \leq \xi \leq A ,$$

$$C = 2A \cdot \frac{\zeta(2m+2)}{2^{m(m+1)}} \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^{2m+2} .$$

$\zeta(\cdot)$ ist die Riemannsche $\zeta$-Funktion. Der Einfluss der Fehlerquelle 3.1.10 ist so gewaltig, dass er alle anderen überdeckt.

Mit wachsendem $R$ , $N$ und $\kappa$ oszilliert der Integrand sehr schnell. Dies hat zur Folge, dass die Ableitungen des Integranden beliebig hohe Werte annehmen können. Da die Stelle $\xi$ nicht näher bestimmt werden kann, ist es wertlos, die zweiunddreissigste Ableitung des Integranden zu berechnen. Auch das Gauss'sche Restglied hat die gleiche Struktur wie 3.1.10. Nach A. Willers [AW], Seite 156, Formel (45) ist:

3.1.11 $R_m = \text{konst} \cdot g^{(2m)}(\xi)$ .

Wir haben mit $m = 16$ Stützstellen integriert.

Die Schwierigkeit, den stark oszillierenden Integranden zu integrieren, wird uns plausibler, wenn wir beachten, dass die Verteilungsfunktion 3.1.2 gegen eine $\delta$-Funktion strebt, wenn $N$ und $\kappa$ immer grösser werden.

Die Werte der Verteilungsfunktion

Die Werte im Anhang geben wir vorläufig achtstellig an, wobei mindestens sechs Stellen signifikant sind. Diese Genauigkeit wird für $\kappa = 0$ und $N \geq 5$ immer erreicht.

Mit wachsendem $\kappa$ und $N$ verkleinert sich die Anzahl signifikanter Stellen. Ebenfalls für $N < 5$ erhalten wir keine guten Werte.

## 4. Ein zirkulärer Mehrstichprobentest

### 4.0 Einleitung

Orientierungsversuche mit Tieren und andere Probleme der Biologie und der Medizin, welche periodischen Charakter haben und deshalb auf den Kreis abgebildet werden können, führen auf das folgende mathematische Problem:

Gegeben sind $n$ Stichproben von beobachteten Zufallswinkeln, die alle zum gleichen Experiment gehören. Dabei sind möglicherweise Aenderungen in den Versuchsbedingungen von Stichprobe zu Stichprobe vorhanden. Die Stichprobenumfänge

4.0.1 $N_i$ , $i = 1,2,\ldots,n$

können beliebig sein. Im allgemeinen Fall haben die Daten folgende Struktur:

4.0.2

$$\begin{array}{ccc} \theta_{11} & \cdots\cdots & \theta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \theta_{1N_1} & \ddots & \vdots \\ & & \theta_{nN_n} \end{array}$$

Jeder Kolonne entspricht eine Stichprobe vom Umfang $N_i$ . Die statistische Nullhypothese $H_o$ lautet:

4.0.3 $H_o$ :

1) Innerhalb einer Stichprobe sind die Messungen unabhängig (Zufallsstichprobe).
2) Verschiedene Stichproben sind voneinander unabhängig
3) Die i-te Stichprobe wurde einer Population mit einer gewissen Verteilungsfunktion $F_i(\theta)$ entnommen.

In vielen Experimenten tritt nur der Spezialfall ein, in dem die Verteilungsfunktionen $F_i(\theta)$ identisch sind.

## 4.1 Das Testverfahren

Nach den Methoden des Kapitels 2 berechnen wir für jede Stichprobe den Betrag des resultierenden, bzw. des mittleren Vektors:

4.1.2 $R_i$ bzw. $r_i = R_i/N_i$ .

Die n Grössen $r_i$ (oder $R_i$) werden statistische Grössen erster Ordnung genannt. Mit Hilfe dieser Statistiken soll ein Test zweiter Ordnung aufgebaut werden.

Unter der Nullhypothese 4.0.3 können wir nach Kapitel 2 die Verteilungen für die Statistiken 4.1.2 bestimmen. Seien nun

4.1.3 $F_i(r,N_i)$ , $i = 1,\ldots,n$

die entsprechenden Verteilungsfunktionen der Grössen $r_i$ in 4.1.2. Jetzt bilden wir die zum dritten Punkt der Nullhypothese 4.0.3 äquivalente Hypothese:

4.1.4 $H_o^r$: $r_i \sim F_i(r,N_i)$ .

Um 4.1.4 zu prüfen, führen wir folgende Statistik ein:

4.1.5 $B = \max_i\{r_i\}$ , $i = 1,\ldots,n$ .

Die Verteilung der Testgrösse B konstruieren wir anhand der Hypothesen 4.0.3 und 4.1.4.

Sei $0 \leq \lambda \leq 1$ , dann wird die Wahrscheinlichkeit, dass B kleiner $\lambda$ ist, wie folgt berechnet:

4.1.6 $P(B < \lambda) = P(r_i < \lambda \; ; \; i = 1,2,\ldots,n)$ .

Nach 4.1.4 ist

4.1.7 $P(r_i < \lambda) = F_i(\lambda, N_i)$ .

Dann geht 4.1.6 über in

4.1.8 $$P(B < \lambda) = \prod_{i=1}^{n} F_i(\lambda, N_i) = G(\lambda) \; .$$

Für eine gegebene Signifikanzschwelle $\alpha$ können wir mit Hilfe der Verteilungsfunktion für B den Test durchführen, indem wir die folgende Gleichung nach $\lambda$ auflösen

4.1.9 $G(\lambda) = 1 - \alpha \Rightarrow \lambda = \lambda(\alpha)$ .

Falls $B > \lambda(\alpha)$ ist, wird die Hypothese $H_o^r$ (4.1.4) und damit auch $H_o$ zurückgewiesen.

## 4.2 Anwendung des Tests für die uniforme und die von Mises Verteilung

Falls $F_o(\theta)$ , in 4.1.2 die uniforme Verteilung ist, d.h.

4.2.1 $F_o(\theta) = \frac{\theta}{2\pi}$ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,

dann wird $G(\lambda)$ von 4.1.11 (nach Kapitel 2, Formel 2.2.1) zu:

4.2.2 $$G(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda \cdot N_i \int_o^{\infty} J_o^{N_i}(x) \cdot J_1(\lambda \cdot x \cdot N_i)\, dx\right)$$

$0 \leq \lambda \leq 1$

Für $N = 3(1)30(10)100$ und für $\lambda = 0(0{,}01)1$ haben wir 4.1.4 berechnet und im Anhang tabelliert. Mit diesen Tabellen ist es möglich, ohne grosse Rechnungen die Gleichung 4.1.9 aufzulösen und damit den Test im Spezialfall der uniformen Verteilung durchzuführen.

Falls $F_o(\theta)$ in 4.0.3 die von Mises Verteilung ist mit der Dichte 2.1.1, wird $G(\lambda)$ nach 2.2.8

$$4.2.3 \qquad G(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left( \lambda \cdot N_i \frac{I_o(\kappa \cdot \lambda \cdot N_i)}{I_o(\kappa)^{N_i}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + \kappa^2} J_o^{N_i}(x) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[ \kappa \frac{I_1(\kappa \cdot \lambda \cdot N_i)}{I_o(\kappa \cdot \lambda \cdot N_i)} \cdot J_o(x \cdot \lambda \cdot N_i) + x \, J_o(x \cdot \lambda \cdot N_i) \right] dx \right) .$$

Für die meistgebrauchten Parameter-Werte $\kappa$ und $N_i$ haben wir 4.1.4 berechnet und im Anhang tabelliert, so dass auch die Hypothese der von Mises Verteilung mit wenig Rechenaufwand geprüft werden kann.

## 4.3 Beispiele

### 4.3.1 Geburtsdaten

P. Walser [PW] hat die Hypothese aufgestellt, dass die Geburtsdaten der Kinder einer Familie in der gleichen Jahreszeit statistisch gehäuft vorkommen.

Um diese Hypothese zu prüfen, notierte Walser , unter anderem, das Geburtsdatum der Kinder von 700 Familien, welche drei und mehr Kinder hatten. Da er keinen passenden Test hatte, reduzierte er die Daten auf Kosten des Informationsgehaltes so, dass er die Geburtsdaten von nur drei Kindern pro Familie berücksichtigte.

Wir nehmen hier einen nicht repräsentativen Ausschnitt aus seinen Daten und wenden unseren Test an, indem wir zuerst das Problem mathematisch formulieren.

Die gegebenen Geburtsdaten sind in Tabelle 4.3.1 zusammengefasst.

Tabelle 4.3.1

| i | 1. Geburt | 2. Geburt | 3. Geburt | 4. Geburt | 5. Geburt | 6. Geburt |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.10.52 | 15.10.53 | 9. 1.55 | 19. 1.58 | 9. 1.60 | 1.12.62 |
| 2 | 21. 2.57 | 9. 3.61 | 5. 3.63 | | | |
| 3 | 3.11.60 | 30.12.61 | 24.12.62 | | | |
| 4 | 15. 3.56 | 17. 3.58 | 20. 3.63 | | | |
| 5 | 13. 8.54 | 29. 8.55 | 26. 9.57 | 25. 9.59 | 4.11.62 | |
| 6 | 6. 9.53 | 9.10.55 | 7.11.56 | | | |
| 7 | 26. 5.59 | 28. 5.60 | 18. 5.61 | | | |
| 8 | 15. 4.59 | 5. 3.61 | 6. 4.63 | | | |
| 9 | 18. 7.59 | 17. 8.60 | 21. 7.62 | | | |
| 10 | 2.12.59 | 26. 1.61 | 26. 1.63 | | | |
| 11 | 12. 9.58 | 29. 9.59 | 15. 9.61 | | | |
| 12 | 12. 7.54 | 4. 8.56 | 30. 8.62 | | | |
| 13 | 13. 5.57 | 4. 6.59 | 14. 6.61 | | | |
| 14 | 22. 4.53 | 9. 3.59 | 4. 4.63 | | | |
| 15 | 22. 3.55 | 12. 3.60 | 23. 2.63 | | | |
| 16 | 25. 6.53 | 6. 7.60 | 6. 6.62 | | | |

Wir bilden das Jahr mit 365 Tagen auf den Kreis mit dem Vollwinkel $360^{\circ}$ ab. Damit gehen die Daten in die Winkel der Tabelle 4.3.2 über.

Tabelle 4.3.2

| i | 1. Geb. | 2. Geb. | 3. Geb. | 4. Geb. | 5. Geb. | 6. Geb. | $r_i(N_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $271^{\circ}$ | $284^{\circ}$ | $8{,}9^{\circ}$ | $18{,}7^{\circ}$ | $8{,}9^{\circ}$ | $330^{\circ}$ | 0,7412 |
| 2 | $51{,}3^{\circ}$ | $67^{\circ}$ | $63^{\circ}$ | | | | 0,9933 |
| 3 | $303^{\circ}$ | $359^{\circ}$ | $352^{\circ}$ | | | | 0,9077 |
| 4 | $73^{\circ}$ | $75^{\circ}$ | $78^{\circ}$ | | | | 0,9994 |
| 5 | $222^{\circ}$ | $237{,}7^{\circ}$ | $265{,}3^{\circ}$ | $263{,}3^{\circ}$ | $303{,}8^{\circ}$ | | 0,8863 |
| 6 | $245{,}6^{\circ}$ | $278^{\circ}$ | $307^{\circ}$ | | | | 0,9065 |
| 7 | $144^{\circ}$ | $146^{\circ}$ | $136^{\circ}$ | | | | 0,9972 |
| 8 | $103{,}6^{\circ}$ | $63^{\circ}$ | $94{,}7^{\circ}$ | | | | 0,9548 |
| 9 | $196^{\circ}$ | $226^{\circ}$ | $199^{\circ}$ | | | | 0,9725 |
| 10 | $331{,}4^{\circ}$ | $25{,}6^{\circ}$ | $25{,}6^{\circ}$ | | | | 0,9031 |
| 11 | $248{,}5^{\circ}$ | $268^{\circ}$ | $254{,}5^{\circ}$ | | | | 0,9898 |
| 12 | $190^{\circ}$ | $213^{\circ}$ | $238{,}7^{\circ}$ | | | | 0,9406 |
| 13 | $131^{\circ}$ | $153^{\circ}$ | $162{,}7^{\circ}$ | | | | 0,9734 |
| 14 | $110^{\circ}$ | $67^{\circ}$ | $92{,}7^{\circ}$ | | | | 0,9530 |
| 15 | $80^{\circ}$ | $70^{\circ}$ | $53^{\circ}$ | | | | 0,9812 |
| 16 | $173{,}6^{\circ}$ | $184{,}4^{\circ}$ | $154{,}8^{\circ}$ | | | | 0,9773 |

Der anfangs erwähnten Hypothese stellen wir die Nullhypothese gegenüber: Die Geburtsdaten der Kinder einer Familie seien unabhängig voneinander uniform über das ganze Jahr verteilt. (Diese Behauptung ist jetzt äquivalent mit der statistischen Hypothese, dass die Winkel der Tabelle 4.3.2 uniform verteilt sind.) Die Nullhypothese können wir sofort prüfen, indem wir die letzte Kolonne der Tabelle 4.3.2 benützen, in der bei jeder Stichprobe (Familie) der zugehörige Betrag des mittleren Vektors, $r_i$, angegeben ist.

Die Teststatistik B wird:

4.3.1 $\quad B = \max\{r_i\} = 0{,}9994$

Wir nehmen gerade $\lambda = B$ und erhalten so direkt die kleinstmögliche Signifikanzschwelle $\alpha$, d.h. den p-Wert dieses Tests. Aus 4.1.12 folgt:

$$G(\lambda = B) = 1-p$$

für $\lambda = 0{,}999$

$$G(0{,}999) = F(\lambda=999, N=6) \cdot F(\lambda=999, N=5) \cdot \cdot (F(\lambda=999, N=3))^{14} .$$

$$G(0{,}999) \approx 0{,}99999 \cdot 0{,}99993 \cdot (0{,}9992)^{14}$$

$$\approx 0{,}9888 = 1-p$$

$$\Rightarrow p = 1 - 0{,}9888 = 0{,}011 .$$

Mit der üblichen Signifikanzschwelle von $\alpha = 0{,}05$ können wir die Hypothese der uniformen Verteilung der Geburten einer Familie über das ganze Jahr zurückweisen. Das Beispiel krankt allerdings daran, dass die Stichprobe nicht repräsentativ ist.

4.3.2 Orientierung von Tauben

Wiltschko (1977) [W] untersucht den Zusammenhang des Erdmagnetismus mit dem Orientierungsvermögen der Tauben. Die Versuche konnten nicht jedesmal mit der gleichen Anzahl Tauben (Stichprobenumfang) durchge-

führt werden. Der Winkel zwischen der "Heimrichtung" und der Richtung, in der die Taube vom Blickfeld des Experimentators verschwindet, ist unsere Zufallsvariable wie in 4.1.3. Wir untersuchen hier das Verhalten der Testgruppen, d.h. derjenigen Tauben, die während des Transports von ihrem Schlag zum Auflassort unter der Wirkung eines veränderlichen Magnetfeldes gestanden haben.

Die Zufallswinkel lassen wir hier weg und geben nur die Beträge des zu jeder Stichprobe gehörigen resultierenden und mittleren Vektors an.

Tabelle 4.3.2

| i | Datum | $N_i$ | $R_i(N_i)$ | $r_i(N_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 7. 8.74 | 10 | 2,1 | 0,21 |
| 2 | 24. 9.74 | 6 | 1,02 | 0,17 |
| 3 | 1. 8.75 | 12 | 5,52 | 0,46 |
| 4 | 28. 7.75 | 11 | 4,29 | 0,39 |
| 5 | 6. 7.75 | 8 | 4,56 | 0,57 |
| 6 | 17. 7.75 | 14 | 3,22 | 0,23 |
| 7 | 18. 7.75 | 11 | 4,95 | 0,45 |
| 8 | 18. 7.76 | 10 | 7,8 | 0,78 |
| 9 | 24. 6.76 | 9 | 5,4 | 0,6 |
| 10 | 2. 8.76 | 8 | 2,56 | 0,32 |
| 11 | 3. 8.76 | 9 | 6,66 | 0,74 |
| 12 | 4. 8.76 | 8 | 2,64 | 0,33 |
| 13 | 5. 8.76 | 8 | 1,36 | 0,17 |
| 14 | 3.10.76 | 7 | 5,32 | 0,76 |
| 15 | 2.11.76 | 7 | 6,58 | 0,94 |
| 16 | 28. 7.76 | 10 | 3,1 | 0,31 |
| 17 | 25.10.76 | 12 | 3,84 | 0,32 |
| 18 | 27.10.76 | 9 | 3,06 | 0,34 |
| 19 | 3. 5.77 | 13 | 5,07 | 0,39 |
| 20 | 23. 8.77 | 12 | 1,92 | 0,16 |

Die Testgrösse B ist $B = 0{,}94 = (r_{15}(N_{15} = 7))$ .

$$\Rightarrow G(\lambda = B) = F(\lambda = 0{,}94,\ N = 6) \cdot F(\lambda = 0{,}94,\ N = 7)^2 \cdot F(\lambda = 0{,}94,\ N = 8)^4 \cdot F(\lambda = 0{,}94,\ N = 9)^3 \cdot F(\lambda = 0{,}94,\ N = 10)^2 \cdot F(\lambda = 0{,}94,\ N = 11)^2 \cdot F(\lambda = 0{,}94,\ N = 12)^3 \cdot F(\lambda = 0{,}94,\ N = 13) \cdot F(\lambda = 0{,}94,\ N = 14)$$

$$= 0{,}999387 \cdot 0{,}999858^2 \cdot 0{,}999967^4 \cdot 0{,}999992^3 \cdot 0{,}999998^2 \cdot 0{,}999999^2 \cdot 0{,}999999^3 \cdot 0{,}999999 \cdot 1.0$$

$$= 0{,}99894$$

$$\Rightarrow p = 0{,}00106$$

Auch in diesem Beispiel wird die Hypothese der Uniformität zurückgewiesen.

## 5. Modelle für Schiefe und Kurtosis

In zwei verschiedenen Anwendungsgebieten der Biomathematik ergeben sich Bedürfnisse für asymmetrische oder schiefe zirkuläre Wahrscheinlichkeitsverteilungen und für flachgipflige oder steilgipflige Verteilungen, welche Verteilungen mit Kurtosis genannt werden.

Erstens möchte man unimodale stochastische Modelle der Kreisstatistik haben, mit denen man Stichproben analysieren kann, die stark von der von Mises Verteilung abweichen. Und zweitens sind deterministische Modelle mit Schiefe und Kurtosis verlangt, um gewisse biologische Rhythmen zu beschreiben. Bis jetzt hat es keine expliziten Formeln für solche Modelle gegeben. In diesem Kapitel werden drei neue Familien von Verteilungen mit Schiefe und Kurtosis angegeben. Zwei Familien sind zweiparametrig und eine ist einparametrig. Die notwendigsten Begriffe der zirkulären Wahrscheinlichkeitstheorie werden im nächsten Abschnitt zusammengestellt.

### 5.1 Einige Begriffe der zirkulären Wahrscheinlichkeitstheorie

Eine Funktion $f(\theta)$ ist Dichte einer absolut stetigen zirkulären Verteilung, wenn

5.1.1 1) $f(\theta) \geq 0 \qquad \forall\, \theta \in R$ ,

2) $f(\theta+2\pi) = f(\theta) \qquad \forall\, \theta \in R$ ,

3) $f(\theta)$ stetig,

4) $\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = 1$ .

Die charakteristische Funktion $\Phi_p$ ist analog zum linearen Fall definiert:

5.1.2 $$\Phi_p = E(e^{ip\theta}) \quad , \quad p = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{ip\theta} f(\theta)\, d\theta$$

$$= \mu_p = \varrho_p \cdot e^{i\theta_p} = \alpha_p + i\beta_p$$

$$= E(\cos p\theta) + iE(\sin p\theta)$$

Die komplexen Zahlen $\mu_p$ werden p-te <u>trigonometrische Momente</u> der Verteilung genannt.

Eine zirkuläre Dichte mit den Eigenschaften 5.1.1 kann eineindeutig durch eine Fourier-Reihe dargestellt werden.

5.1.3 $$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot [1 + 2 \cdot \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_p \cos p\theta + \beta_p \sin p\theta)] \; .$$

Mit Hilfe des ersten und zweiten trigonometrischen Momente werden Masse für Schiefe und Kurtosis wie folgt definiert:

Für <u>Asymmetrie</u> oder <u>Schiefe</u> hat Batschelet (1965) [B], Seite 14, Formel (10.2) folgendes Mass eingeführt:

5.1.4 $$\gamma = \varrho_2 \sin(\theta_2 - 2\theta_1) \; .$$

Die Kurtosis ist auf dem Kreis nicht eindeutig definierbar, denn es gibt keine etablierte "Normalverteilung" in der Kreisstatistik. Mardia (1972) [M], Seite 76 (3.7.11) nimmt die "aufgewickelte" Gaussverteilung als Norm an, und konstruiert folgendes Mass für die Kurtosis, welches Null wird für diese Verteilung:

5.1.5 $$\delta = \frac{\varrho_2 \cdot \cos(\theta_2 - 2\theta_1) - \varrho_1^4}{(1 - \varrho_1)^2}$$

## 5.2 <u>Verteilungen mit Kurtosis</u>

Wir führen eine zweiparametrige und eine einparametrige Familie von Dichten ein, die bei unabhängigen Variationen der Parameter ver-

schieden starke Abweichungen von der aufgewickelten Gaussdichte, von der cosinus- als auch von der von Mises-Dichte annehmen. Die zweiparametrige Familie mit den Parametern $\kappa$ und $\nu$ ist:

5.2.1 $$f_1(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\kappa}{\pi}\,(J_1(\nu)+\cos(\theta+\nu \sin \theta)),\ \theta \in R$$

$J_1(\nu)$ ist die Besselfunktion (2.2.2).

Prüfung der Eigenschaften 5.1.1

Um die erste Eigenschaft zu erfüllen,wählen wir

$$|\kappa| \leq \frac{1}{2(1+|J_1(\nu)|)} \quad .$$

2) und 3) sind definitionsgemäss erfüllt.

Für die vierte Eigenschaft haben wir:

$$\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\,d\theta = 1 + \frac{\kappa}{\pi}\,(2\pi\, J_1(\nu) + \int_0^{2\pi} \cos(\theta+\nu \sin \theta)\,d\theta)$$

Das letzte Integral berechnen wir mit Hilfe einer anderen Definition der Besselfunktionen.

Nach [LS] Seite 487, Formel (15) ist:

5.2.2 $$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt-z \sin t)\,dt \quad .$$

Mit 5.2.2 und der Eigenschaft

5.2.3 $$J_n(-z) = (-1)^n\, J_n(z)$$

erhalten wir

5.2.4 $$\int_0^{2\pi} \cos(\theta+\nu \sin \theta)\,d\theta = -2\pi\, J_1(\nu) \quad .$$

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} f_1(\theta)\,d\theta = 1 \quad .$$

Fordern wir überdies, dass die Verteilung unimodal ist, so muss das Argument des Cosinus von 6.2.1 monoton in $\theta$ sein, d.h. die stück-

weise Monotonizität des Cosinus muss erhalten bleiben. Daraus ergibt sich für $\nu$ : $|\nu| < 1$ .

Die einparametrige Familie

Wir führen folgende Wahrscheinlichkeitsdichte ein:

5.2.5 $$f_2(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{\lambda\cos\theta} \cdot \cos(\lambda \sin\theta) ,$$

$$\theta \in R \quad , \quad |\lambda| \leq \pi/2 .$$

$f_2(\theta)$ erfüllt nach Definition die ersten drei Eigenschaften von 5.1.1.

Um die Normierungseigenschaft 4 von 5.2.5 zu zeigen, entwickeln wir $f_2(\theta)$ in eine Fourier-Reihe.

Sei

$$z = \lambda e^{ix} = \lambda \cos x + i\lambda \sin x .$$

Dann ist

$$e^z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^{\lambda\cdot\cos x} \cdot e^{i\lambda\cdot\sin x}$$

$$= e^{\lambda\cdot\cos x}(\cos(\lambda \sin x) + i \sin(\lambda \sin x))$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \cos kx + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \sin kx$$

$\Rightarrow$

5.2.6 $$e^{\lambda\cdot\cos x} \cos(\lambda \sin x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \cos kx .$$

Das Integral 4) aus 5.1.1 ist:

5.2.7 $$\int_0^{2\pi} f_2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\lambda\cdot\cos\theta} \cdot \cos(\lambda \sin\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \cos k\theta)\,d\theta .$$

$$= 1 .$$

Die Fourier-Darstellung von $f_2(\theta)$

5.2.8 $$f_2(\theta) = \frac{1}{2\pi}(1+2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{k!} \lambda^k \cos k\theta)$$

benützen wir noch, um direkt die trigonometrischen Momente abzulesen, und daraus die Kurtosis zu berechnen. Nach 5.1.2 und 5.1.3 und 5.2.8 ist:

$$\alpha_p = \frac{1}{2}\frac{1}{k!}\lambda^k \quad , \quad \beta_p = 0 \rightarrow$$

$$\mu_p = \alpha_p + i\beta_p = \alpha_p = \varrho_p \cdot e^{i\theta_p} \rightarrow \theta_p = 0(\pi) \ ,$$

5.2.9 $$\mu_p = \varrho_p(\cos\theta_p + i \sin\theta_p) = \varrho_p \cdot \mathrm{sign}(\alpha_p)$$

$$\rightarrow \quad \cos(\theta_2 - 2\theta_1) = \cos\theta_2 \cdot \cos 2\theta_1 = \mathrm{sign}(\alpha_2)$$

Die Kurtosis 5.1.5 wird:

5.2.10 $$\delta = \frac{\lambda^2(2-\lambda^2)}{8(1-\lambda/2)^2} \cdot \mathrm{sign}(\alpha_2)$$

5.3 Die Kurtosis von 5.2.1

Um die Kurtosis von 5.2.1 zu erhalten, entwickeln wir $f_1(\theta)$ in eine Fourier-Reihe. Nach Abramowitz [A] Seite 361, Formeln 9.1.42 und 9.1.43 ist:

5.3.1 $$\cos(\nu \sin\theta) = J_o(\nu) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\nu)\cos(2k\theta)$$

5.3.2 $$\sin(\nu \sin\theta) = 2 \cdot \sum_{k=o}^{\infty} J_{2k+1}(\nu)\sin((2k+1)\theta) \ .$$

Mit der goniometrischen Umformung:

5.3.3 $$\cos(\theta + \nu \sin\theta) = \cos\theta \cdot \cos(\nu \sin\theta) - \sin\theta \cdot \sin(\nu \sin\theta) \ ,$$

wird 5.2.1 zu:

5.3.4 $$f_1(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\kappa}{\pi}\,(J_1(\nu) + \cos(\theta + \nu \sin\theta))$$

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{\kappa}{\pi}\,(J_1(\nu) + \cos\theta\cdot\cos(\nu\sin\theta) - \sin\theta\cdot\sin(\nu\sin\theta$$

(nach 5.3.1, 5.3.2)

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{\kappa}{\pi}\,[J_1(\nu) + \cos\theta\cdot J_0(\nu) +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\nu)\cdot\cos\theta\cdot\cos(2k\theta) -$$

$$- 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\nu)\cdot\sin\theta\cdot\sin((2k+1)\theta)]\ .$$

Mit den goniometrischen Beziehungen

5.3.5 $$\cos\theta\cdot\cos(2k\theta) = \frac{1}{2}\,[\cos(2k-1)\theta + \cos(2k+1)\theta]$$

5.3.6 $$\sin\theta\cdot\sin(2k+1)\theta = \frac{1}{2}\,[\cos(2k\theta) - \cos(2k+2)\theta]$$

erhalten wir für den ersten Summanden von 5.3.4:

5.3.7 $$\frac{1}{2}\,J_{2k}(\nu)\cdot[\cos(2k-1)\theta + \cos(2k+1)\theta]$$

und für den zweiten:

5.3.8 $$\frac{1}{2}\,J_{2k+1}(\nu)\cdot[\cos(2k\theta) - \cos(2k+2)\theta]\ .$$

Nach 5.1.3 erkennen wir sofort, dass

5.3.9 $\beta_p = 0$ ist.

Wir setzen in 5.3.8, 5.3.7, 5.3.4

$k = 0,1,2$

ein und erhalten für $\alpha_p$ :

5.3.10 $$\alpha_1 = \kappa\,(J_0(\nu) + J_2(\nu))$$
$$\alpha_2 = \kappa\,(J_1(\nu) - J_3(\nu))\ .$$

Nach 5.1.2, 5.3.9, 5.3.10 ist

5.3.11 $$\mu_p = \alpha_p = \varrho_p e^{i\theta_p} \rightarrow \theta_p = 0(\pi) \rightarrow \varrho_1 = \kappa\,|J_0(\nu) + J_2(\nu)|$$
$$\varrho_2 = \kappa\,|J_1(\nu) - J_3(\nu)|\ .$$

Mit 5.3.13, 5.29 wird die Kurtosis von $f_1(\theta)$ nach 5.1.5 zu:

$$5.3.12 \qquad \delta = \frac{\kappa|J_1(\nu)-J_3(\nu)|\cdot\operatorname{sign}(\alpha_2)-\kappa^4|J_0(\nu)+J_2(\nu)|^4}{(1-\kappa|J_0(\nu)+J_2(\nu)|)^2} \quad .$$

## 5.4 Verteilungen mit Schiefe

Wir geben eine zweiparametrige Familie von asymmetrischen zirkulären Dichten an:

$$5.4.1 \qquad f_3(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\kappa}{\pi}\sin(\theta+\nu\sin\theta)$$

$$\theta \in R$$

$$|\nu| < 1$$

$$|\kappa| \leq 1/2 \quad .$$

Die Dichte 5.3.1 ist äquivalent mit

$$f_4(\psi) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\kappa}{\pi}\cos(\psi-\nu\cos\psi) \quad ,$$

wobei

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \theta \quad .$$

Die Eigenschaften 5.1.1 sind aus der Definition ersichtlich.

Wir berechnen die Momente von $f_3(\theta)$ und mit derer Hilfe die Schiefe von 5.4.1.

Wir entwickeln 5.4.1 in eine Fourier-Reihe:

Nach Abramowitz [A] Seite 361, Formeln 9.1.42 und 9.1.43 ist:

$$5.4.2 \qquad \cos(\nu\sin\theta) = J_0(\nu) + 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\nu)\cdot\cos(2k\theta)$$

$$\sin(\nu\sin\theta) = 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\nu)\cdot\sin((2k+1)\theta) \quad .$$

Nun wird:

5.4.3 $$f_3(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{k}{\pi} \sin(\theta + \nu \sin\theta)$$

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{k}{\pi} (\sin\theta \cdot \cos(\nu \sin\theta) + \cos\theta \sin(\nu \sin\theta))$$

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{k}{\pi} [J_o(\nu) \cdot \sin\theta + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\nu) \cdot \sin\theta \cos(2k\theta)$$

$$+ 2 \cdot \sum_{k=o}^{\infty} J_{2k+1}(\nu) \cdot \cos\theta \sin((2k+1)\theta)] \ .$$

Mit den goniometrischen Beziehungen

$$\sin\theta \cos(2k\theta) = \frac{1}{2}(\sin((2k+1)\theta + \sin((1-2k)\theta))$$

$$\cos\theta \sin((2k+1)\theta) = \frac{1}{2}(\sin((2k+2)\theta) + \sin(2k\theta))$$

in 5.4.3 eingesetzt können wir sofort die trigonometrischen Momente von $f_3(\theta)$ ablesen:

5.4.4 $$\alpha_p = 0$$
$$\beta_p = \kappa (J_{p-1}(\nu) + (-1)^p J_{p+1}(\nu)) \ .$$

Nach 5.1.2 ist:

$$\mu_p = i\beta_p = \varrho_p \cdot e^{i\theta_p} \Rightarrow \theta_p = \frac{\pi}{2} \ (\pi) \ .$$

Nach 5.1.4 ist die Schiefe von $f_3(\theta)$ :

5.4.5 $$\gamma = -\kappa |J_1(\nu) + J_3(\nu)| \cdot \text{sign}(\beta_2)$$

$$(\sin(\theta_2 - 2\theta_1) = \sin\theta_2 \cdot \cos 2\theta_1 = -\text{sign}\ \theta_2 \quad \text{mit} \quad \theta_p = \frac{\pi}{2} \ (\pi) \ ).$$

Figur 1 zeigt eine Periode der Funktion $f_1(\theta)$ von 5.2.1 mit den Parameterwerten $\kappa = -0{,}3$ , $\nu = 0{,}9$ . Figur 1 ist ein typischer Graph einer flachgipfligen Verteilung mit Kurtosis. Für $\kappa = +0{,}3$ erhalten wir eine steilgipflige Verteilung. Ein Beispiel mit Schiefe illustrier Figur 2. Sie zeigt den Graph von 5.4.1 mit $\kappa = 0{,}5$ , $\nu = \pi/18$ .

## 6. Korrelationen auf dem Torus

Es gibt keinen einheitlichen Korrelationskoeffizienten,um zwei zirkuläre Zufallsvariable zu vergleichen. In der Literatur gibt es sieben Definitionen für Korrelationskoeffizienten auf dem Torus. Wir betrachten hier nur zwei der sieben Definitionen und zeigen, dass die so erhaltenen Korrelationskoeffizienten äquivalent sind. Anscheinend ist diese Aequivalenz übersehen worden.

### 6.1 Die zirkuläre Abhängigkeit

Alle Definitionen gehen von einem Paar Zufallswinkel aus

6.1.1 $(\theta,\varphi)$

mit Werten auf dem Torus

6.1.2 $\theta, \varphi \in (0,2\pi)$ ,

und von einer Stichprobe $(\theta_i,\varphi_i)$ von Umfang n. In Analogie zur linearen Abhängigkeit wird eine zirkuläre Abhängigkeit wie folgt definiert:

6.1.3 $\theta = (\pm\varphi + \psi) \quad (2\pi)$

### 6.2 Die Koeffizienten

Mardia 1975 [M] gibt folgende Definition an:

6.2.1 $$r_M = \max\left(\frac{D^+}{d}, \frac{D^-}{d}\right) ,$$

mit $$n^2 D^{\pm} = \left[\sum_i \cos(\alpha_i^*) - n\bar{R}_\theta \bar{R}_\varphi\right]^2 + \left[\sum \sin(\alpha_i^*)\right]^2$$

$$\theta_i^* = \theta_i - \bar{\theta} , \quad \varphi_i^* = \varphi_i - \bar{\varphi} , \quad \alpha_i^* = \theta_i^* \mp \varphi_i^* ,$$

$\bar{\theta},\bar{\varphi}$ : mittlere Richtungen von $\theta,\varphi$ ;

$\bar{R}_\theta,\bar{R}_\varphi$ : Längen der mittleren Vektoren;

$d = (1-\bar{R}_\theta^2)(1-\bar{R}_\varphi^2)$ .

$r_M$ ist nicht definiert falls $\bar{\theta}$ oder $\bar{\varphi}$ nicht existieren und falls $\bar{R}_\theta = 1$ oder $\bar{R}_\varphi = 1$ ist.

6.2.2 $$\bar{R}_\theta^2 = \bar{C}_\theta^2 + \bar{S}_\theta^2$$

6.2.3 $$\bar{C}_\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \cos \theta_i \ , \ \bar{S}_\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin \theta_i \ .$$

Downs (1974) [D] definiert ganz analog zum linearen Fall:

6.2.4 $$r_D = \frac{S_{\theta\varphi}}{\sqrt{d}}$$

$$S_{\theta\varphi} = |T(T'T)^{-1/2}| \ \text{Spur}(T'T)^{1/2}$$

T ist die Matrix:

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \cos \theta_i - \bar{C}_\theta \\ \sin \theta_i - \bar{S}_\theta \end{pmatrix} \cdot (\cos \varphi_i - \bar{C}_\varphi, \sin \varphi_i - \bar{S}_\varphi) .$$

Satz:

Falls $\bar{\theta}$ und $\bar{\varphi}$ existieren und falls $\bar{R}_\theta \neq 1$ und $\bar{R}_\varphi \neq 1$ sind, dann gilt:

entweder ist $r_D^2 = D^+$ oder $r_D^2 = D^-$ .

6.3 Beweis des Satzes

Der Beweis beruht auf der Idee, $r_D$ soweit umzuformen, bis man, in seine letzte Formulierung, die Behauptung ablesen kann.

Mit den Abkürzungen

6.3.1 $$\alpha_i = \theta_i - \varphi_i$$
$$\beta_i = \theta_i + \varphi_i$$

$$a = \frac{1}{2} \Sigma \{\cos \alpha_i + \cos \beta_i\} - n\bar{C}_\varphi \bar{C}_\theta$$
$$b = \frac{1}{2} \Sigma \{\sin \beta_i - \sin \alpha_i\} - n\bar{S}_\varphi \bar{C}_\theta$$
$$c = \frac{1}{2} \Sigma \{\sin \beta_i + \sin \alpha_i\} - n\bar{C}_\varphi \bar{S}_\theta$$
$$d = \frac{1}{2} \Sigma \{\cos \alpha_i - \cos \beta_i\} - n\bar{S}_\varphi \bar{S}_\theta$$

wird die Matrix T von 6.2.4 zu:

6.3.2 $$T = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Sei die Matrix X

6.3.3 $$X = (T'T)^{1/2}$$

$$= \begin{pmatrix} x, & y \\ s, & t \end{pmatrix}$$

$$XX = T'T .$$

Aus: $$T'T = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & , ab+cd \\ ab+cd & , b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ C & D \end{pmatrix}$$

und aus $$XX = \begin{pmatrix} x^2+sy & , xy+yt \\ sx+st & , sy+t^2 \end{pmatrix}$$

folgt $$y = s .$$

Die wichtigste Grösse für die Definition von $r_D$ ist die Spur von X

6.3.4 $$\text{Spur}\,(T'T)^{1/2} = \text{Spur}\ X = x+t = Z .$$

Aus $$XX = T'T$$

folgt weiter

6.3.5
$$x^2 + y^2 = A$$
$$t^2 + y^2 = D$$
$$y(x+t) = C$$
$$x + t = Z .$$

Aus dem Gleichungssystem 6.3.5 gewinnen wir eine biquadratische Gleichung für Z :

6.3.6 $$Z^4 - 2(A+D)Z^2 + (A-D)^2 + 4C^2 = 0 .$$

Daraus ergibt sich für Z

6.3.7 $$Z = \text{Spur}\,(T'T)^{1/2} = \pm\,((a\pm d)^2 + (b\mp c)^2)^{1/2} .$$

Aus der Orthogonalität der Matrizen folgt:

$$|T(T'T)^{-1/2}| = \pm 1 \quad .$$

Aus Symmetriegründen verfolgen wir nur das Vorzeichenpaar $(+,-)$ .

Wenn wir 6.3.3 in 6.3.9 einsetzen und 6.3.9 in 6.3.6 erhalten wir für $r_D$ :

6.3.8
$$n^2 \cdot r_D^2 \cdot d = [\Sigma \cos \alpha_i - n(\bar{C}_\varphi \bar{C}_\theta - \bar{S}_\varphi \bar{S}_\theta]^2 + [-\Sigma \sin \alpha_i - n(\bar{S}_\varphi \bar{C}_\theta - \bar{C}_\varphi \bar{S}_\theta]^2 \quad .$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass:

$$\bar{\theta} = \bar{\varphi} = 0$$

ist.

Dann folgt:

$$\bar{S}_\theta = \bar{S}_\varphi = 0 \quad , \quad \alpha_i = \alpha_i^* \quad ,$$

und 6.3.10 geht in die Ausdrücke von $D^{\pm}$ in 6.2.1 über. Somit ist der Satz bewiesen.

## 7. Schlussbemerkungen

Aus der Arbeit haben sich mehrere neue Fragestellungen ergeben, die für eine zukünftige Forschung aufgespart werden. Im einzelnen handelt es sich um die folgenden Probleme:

1) Mit der neuen Verteilungsfunktion für $r(N,\kappa)$ 2.2.5 ist es jetzt möglich, Tabellen für

   a) Erwartungswerte von $r(N,\kappa)$
   b) Streuungsmasse für $r(N,\kappa)$
   c) Medianwerte für $r(N,\kappa)$

   zu berechnen.

   Solche Resultate sind für die Anwendungen, z.B. für die Punktschätzu von Parametern, notwendig.

2) Ebenfalls mit Hilfe von 2.2.5 kann man Konfidenzintervalle für den Parameter $\kappa$ der von Mises Verteilung konstruieren.
   Figur 3 gibt eine Idee, wie man solche Konfidenzintervalle konstruieren würde.

3) Die neu eingeführten periodischen Funktionen 5.2.1, 5.2.5, 5.4.1 eignen sich, wie schon oben erwähnt, als deterministische Modelle für eine Klasse von biologischen Rhythmen. Es muss jetzt noch gezeigt werden, wie man die Parameter $\kappa$ und $\nu$ mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate schätzt.

4) Eine interessante Forschungsaufgabe ausserhalb des Rahmens dieser Arbeit ist die folgende:
   Bekanntlich benützt die Gauss'sche Integrationsmethode Systeme von orthogonalen Polynomen über das Integrationsintervall. Je nach der Wahl der Gewichtsfunktion und der Bedingungen an die Stützstellen,

ergeben sich verschiedene orthogonale Funktionssysteme. Wir haben hier das Gewicht 1 benützt und deshalb die Legendreschen Polynome benützt. Nun bilden aber die Besselfunktionen auch ein orthogonales System.

Es erhebt sich die Frage, wie man das orthogonale Funktionensystem der Besselfunktionen mit der Gauss'schen Integrationsmethode verbindet. Denn dieses System wäre dem Problem "Integration von Funktionen von Besselfunktionen" angepasst.

An erster Stelle bin ich meinem Doktorvater, Professor Dr. E. Batschelet, dankbar, dass er mich in vielen verständnisvollen Diskussionen und mit Geduld in die Problematik der Biomathematik eingeführt hat. Auch dass ich die Resultate von Kapitel 4 am $11^{th}$ European Meeting of Statisticians, August 1978, Oslo, vortragen durfte, war mir eine Hilfe.

Ganz besonders möchte ich die Hilfe betonen, die mir mein Freund und Kollege Swend Erik Knudsen angedeihen liess. Er hat mir seine Erfahrungen mit dem ETH-Computer zur Verfügung gestellt.

Frau Rachel Boller hat das Manuskript in Rekordzeit mitten in den Weihnachtsferien geschrieben.

## 8. Literaturverzeichnis


[A] M. Abramowitz and I.A. Stegum, "Handbook of Mathematical Functions", U.S. Department of Commerce. National Bureau of Standards. Applied Mathematics. Series 55 (1964).

[EA] E.E. Allen, Math. Tables, Aids Computation (1956) 10 p. 162, (1954) 8 p. 240.

[B] E. Batschelet, "Statistical Methods of Problems in Animal Orientation and Certain Biological Rhythms", American Institute of Biological Sciences, Washington, D.C. (1965).

[BRS] F.L. Bauer, H. Rutishauser, E. Stiefel, "New aspects in numerical quadrature", Exp. Arithm. Computing and Mathematics (1963) 15 p. 199-218.

[CB] C. Blatter, "Analysis III", Springer-Verlag 1974.

[D] T.D. Downs, "Rotational Angular Correlations", Biorythms and Human Reproduction, John Wiley (1974).

[GM] A. Gray, G.B. Mathews, "A Treatise on Bessel Functions", Macmillan, New York 1895.

[GD] J.A. Greenwood and D. Durand, "The distribution of length and components of the sum of n random unit vectors", Ann. Math. Stat. 26 (1955), p. 233-246

[K] J.C. Kluyver, "A local probability problem", Nederl. Akad. Wetensch., Proc., Vol. 8 (1906), p. 341-350.

[LS] M.A. Lawrentjew und B.W. Schabat, "Methoden der komplexen Funktionentheorie", VEB deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1967.

[M] K.V. Mardia, "Statistics of Directional Data", Academic Press (1972).

[M] K.V. Mardia, "Statistics of Directional Data", J.R. Statist. Soc. B 37, p. 349-393 (1975).

[P] K. Pearson, "The problem of the random walk", Nature Vol. 72 (1905), p. 294-302.

[S] E. Stiefel, "Altes und Neues über numerische Quadratur", ZAMM 41 (1961), p. 408-413.

[SOS] A.H. Stroud, Don Secrest, "Gaussian Quadrature Formulas", Prentice-Hall, 1966.

[PW] P. Walser, "Untersuchung über die Verteilung der Geburtstermine bei der mehrgebärenden Frau", Helvetica Paediatrica Acta, Supplementum XX, Vol. 24 (1969).

[AW] A. Willers, "Methoden der Praktischen Analysis", Walter de Gruyter, Berlin 1950.

[W] R. and W. Wiltschko and W.T. Keeton, "Effect of Outward Journey in an Altered Magnetic Field on the Orientation of Young Homing Pigeons", Animal Migration Navigation, and Homing. Proc. in Life Sc. Springer 1978.

[JZ] J.H. Zar, "Biostatistical Analysis",Prentice-Hall, 1974.

## 9. Anhang

Tabellen der Verteilungsfunktion von $r$.

Legenden zu den Figuren

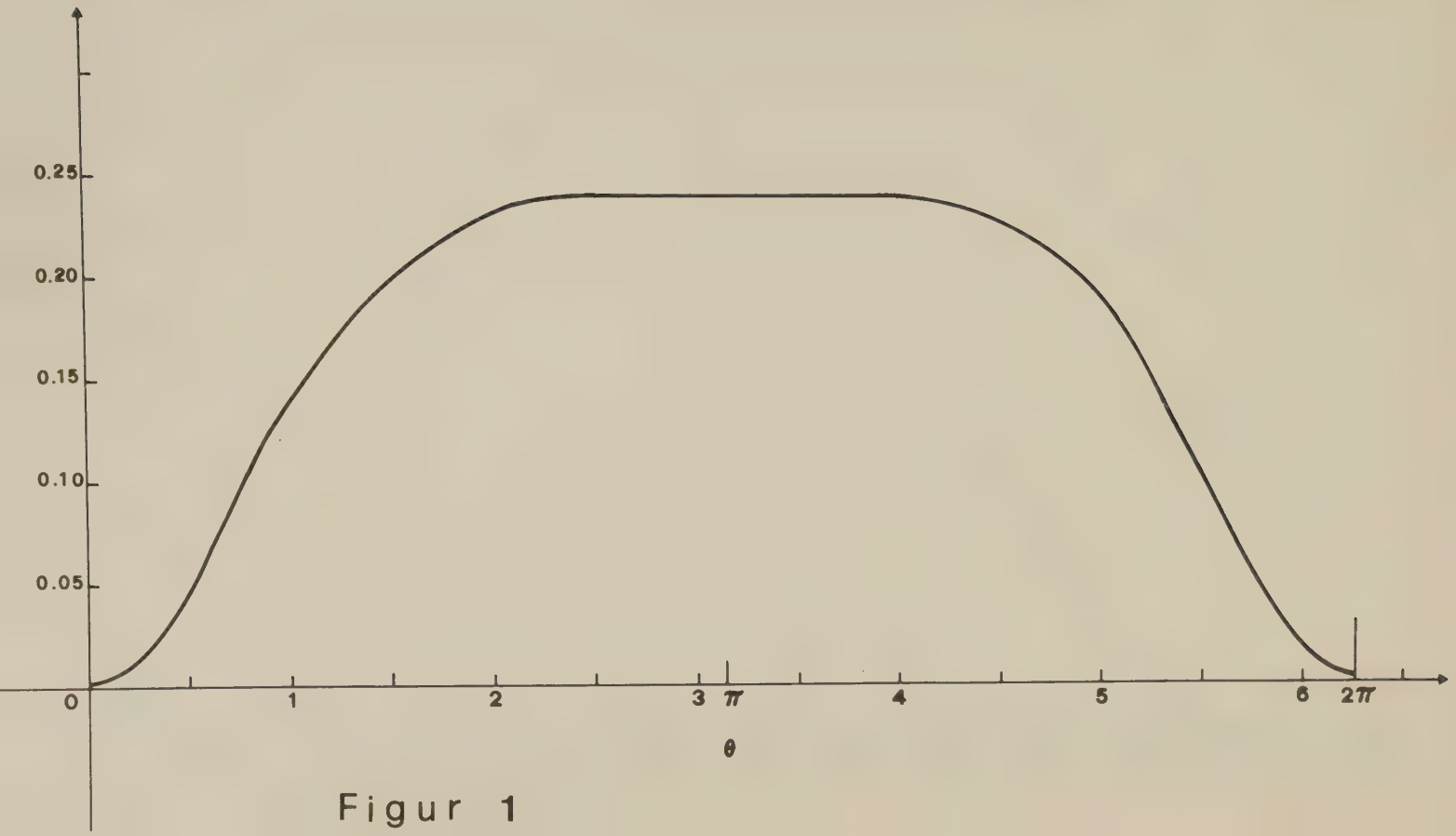
Zu Figur 1: Die Kurtosis ist in dieser Figur deutlich zu sehen. Hier haben wir $\kappa = -0,3$ und $\nu = 0,9$ in die Formel 5.2.1 eingesetzt und den entsprechenden Graph gezeichnet; Für $\kappa = +0,3$ erhalten wir statt der gezeichneten flachgipfligen Verteilung eine steilgipflige. Geometrisch haben wir die gezeichnete Figur periodisch fortzusetzen und das Blatt um $180^{\circ}$ zu drehen.

Zu Figur 2: Hier ist 5.4.1 für $\kappa = 1/2$ und $\nu = \pi/18$ gezeichnet. Die Asymmetrie oder Schiefe ist von Auge erkennbar.

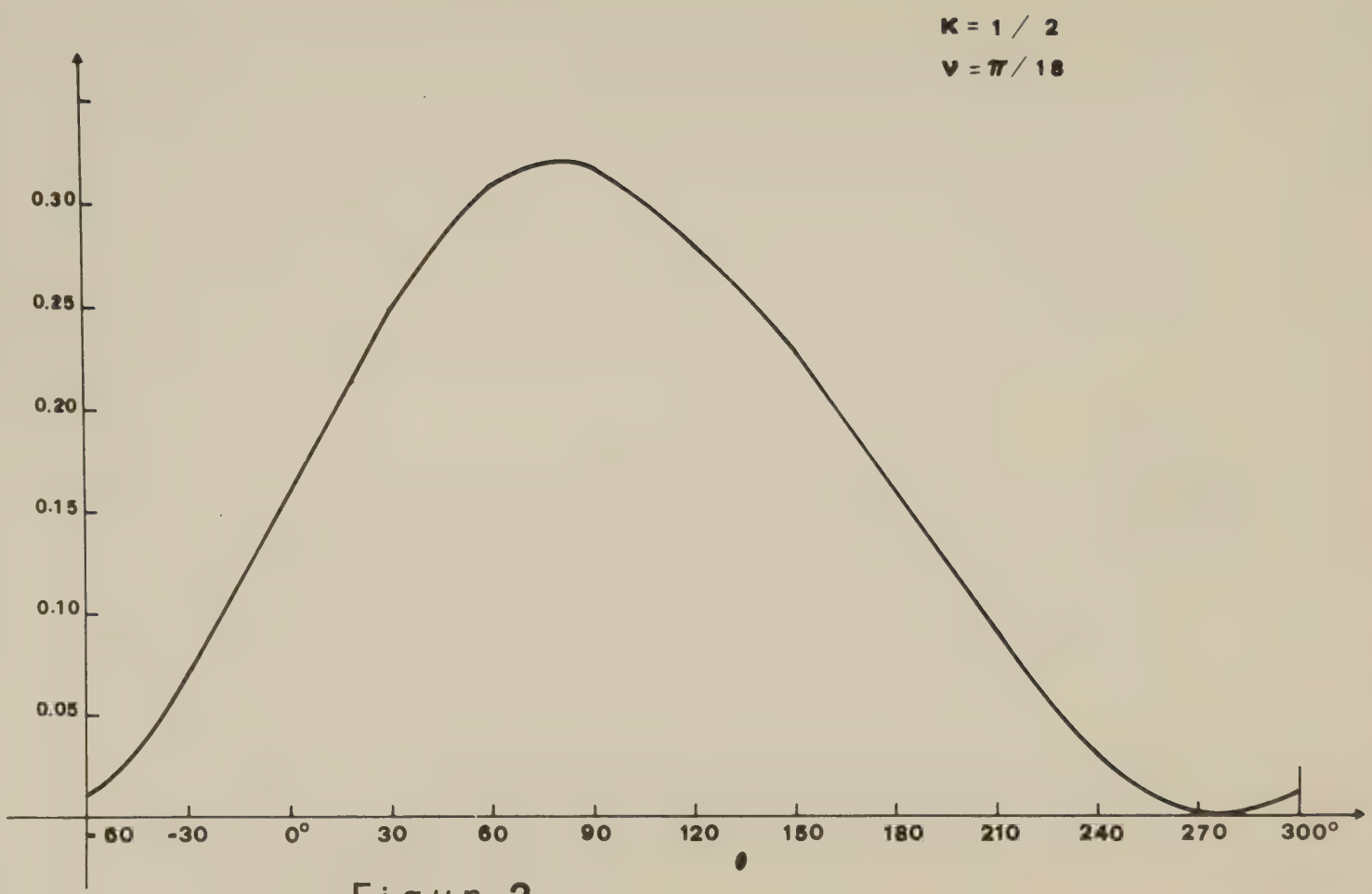
Zu Figur 3: Hier sind Konfidenzintervalle für $\kappa$ gezeichnet für Stichproben vom Umfang $N = 8$ . Wenn z.B. eine Stichprobe einen mittleren Vektor mit $r = 0,6$ hat, dann liegt $\kappa$ mit 90 % Wahrscheinlichkeit ($Q = 90\,\%$ Im Intervall $\kappa \in (0;2,5)$ .
Die Grenzkurven sind mit Hilfe der tabellierten Werte von 2.2.5 berechnet worden.

$K = -0.3$

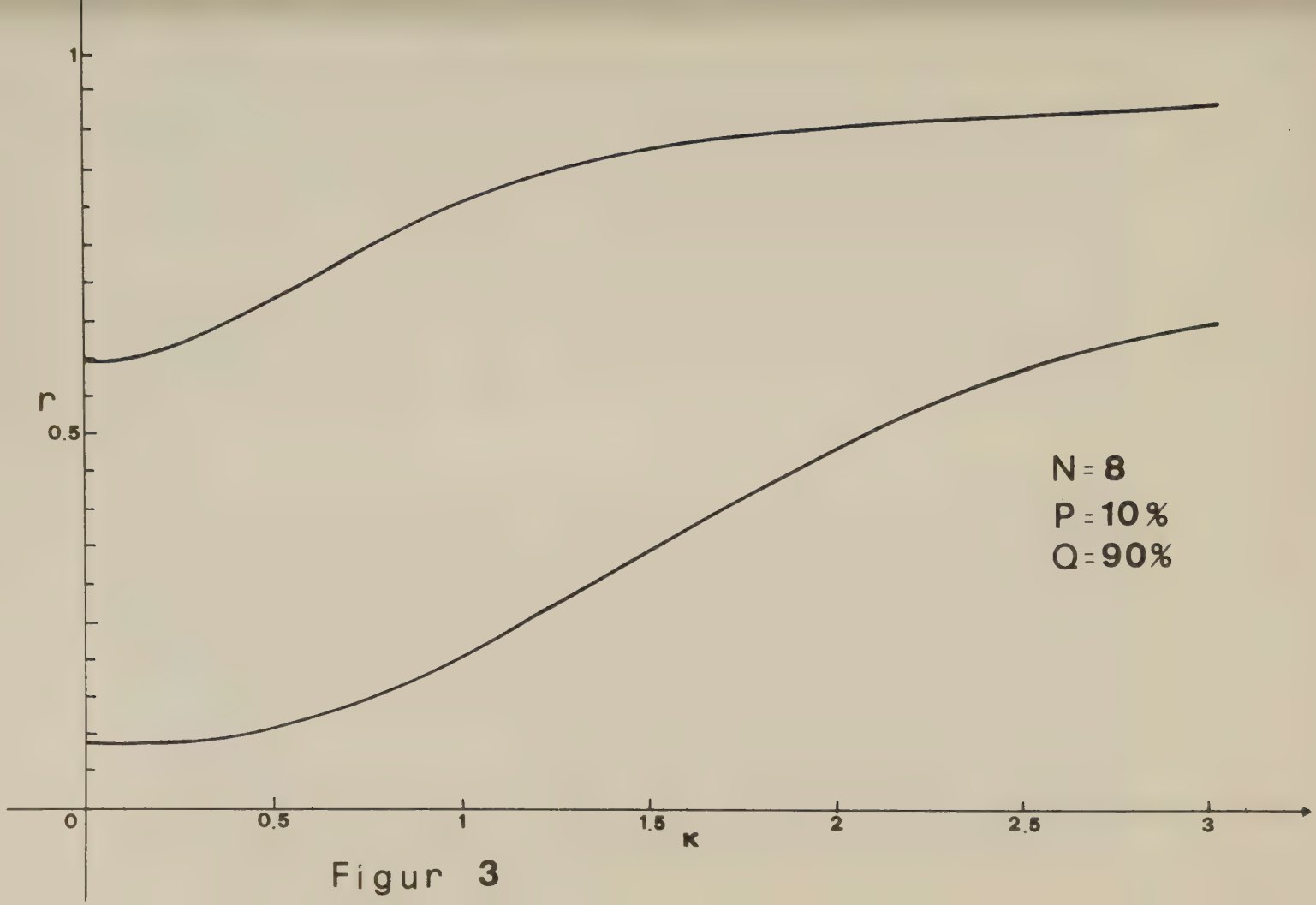
$\nu = 0.9$




Figur 1


K = 1 / 2
ν = π / 18
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
-60
-30
0°
30
60
90
120
150
180
210
240
270
300°
θ

Figur 2




Figur 3

N= 5

KAPPA= 0.5 N= 5

| | | | |
|---|---|---|---|
| R= 0.01 | PR(RR<R)= 0.00030320 | R= 0.51 | PR(RR<R)= 0.61435532 |
| R= 0.02 | PR(RR<R)= 0.00121317 | R= 0.52 | PR(RR<R)= 0.63194625 |
| R= 0.03 | PR(RR<R)= 0.00273105 | R= 0.53 | PR(RR<R)= 0.64740988 |
| R= 0.04 | PR(RR<R)= 0.00485871 | R= 0.54 | PR(RR<R)= 0.66371453 |
| R= 0.05 | PR(RR<R)= 0.00759878 | R= 0.55 | PR(RR<R)= 0.67982190 |
| R= 0.06 | PR(RR<R)= 0.01095463 | R= 0.56 | PR(RR<R)= 0.69568574 |
| R= 0.07 | PR(RR<R)= 0.01493158 | R= 0.57 | PR(RR<R)= 0.71125329 |
| R= 0.08 | PR(RR<R)= 0.01953139 | R= 0.58 | PR(RR<R)= 0.72644352 |
| R= 0.09 | PR(RR<R)= 0.02476289 | R= 0.59 | PR(RR<R)= 0.74117527 |
| R= 0.10 | PR(RR<R)= 0.03063156 | R= 0.60 | PR(RR<R)= 0.75524537 |
| R= 0.11 | PR(RR<R)= 0.03714477 | R= 0.61 | PR(RR<R)= 0.76834587 |
| R= 0.12 | PR(RR<R)= 0.04431070 | R= 0.62 | PR(RR<R)= 0.78074180 |
| R= 0.13 | PR(RR<R)= 0.05213825 | R= 0.63 | PR(RR<R)= 0.79257533 |
| R= 0.14 | PR(RR<R)= 0.06063736 | R= 0.64 | PR(RR<R)= 0.80392402 |
| R= 0.15 | PR(RR<R)= 0.06981376 | R= 0.65 | PR(RR<R)= 0.81483188 |
| R= 0.16 | PR(RR<R)= 0.07966393 | R= 0.66 | PR(RR<R)= 0.82533166 |
| R= 0.17 | PR(RR<R)= 0.09017568 | R= 0.67 | PR(RR<R)= 0.83544339 |
| R= 0.18 | PR(RR<R)= 0.10137718 | R= 0.68 | PR(RR<R)= 0.84520479 |
| R= 0.19 | PR(RR<R)= 0.11326031 | R= 0.69 | PR(RR<R)= 0.85461576 |
| R= 0.20 | PR(RR<R)= 0.12583983 | R= 0.70 | PR(RR<R)= 0.86369454 |
| R= 0.21 | PR(RR<R)= 0.13909333 | R= 0.71 | PR(RR<R)= 0.87245243 |
| R= 0.22 | PR(RR<R)= 0.15301561 | R= 0.72 | PR(RR<R)= 0.88089307 |
| R= 0.23 | PR(RR<R)= 0.16759363 | R= 0.73 | PR(RR<R)= 0.88903335 |
| R= 0.24 | PR(RR<R)= 0.18280505 | R= 0.74 | PR(RR<R)= 0.89688248 |
| R= 0.25 | PR(RR<R)= 0.19863563 | R= 0.75 | PR(RR<R)= 0.90443238 |
| R= 0.26 | PR(RR<R)= 0.21506359 | R= 0.76 | PR(RR<R)= 0.91169364 |
| R= 0.27 | PR(RR<R)= 0.23206301 | R= 0.77 | PR(RR<R)= 0.91866331 |
| R= 0.28 | PR(RR<R)= 0.24959959 | R= 0.78 | PR(RR<R)= 0.92536209 |
| R= 0.29 | PR(RR<R)= 0.26763563 | R= 0.79 | PR(RR<R)= 0.93177413 |
| R= 0.30 | PR(RR<R)= 0.28613121 | R= 0.80 | PR(RR<R)= 0.93790543 |
| R= 0.31 | PR(RR<R)= 0.30504206 | R= 0.81 | PR(RR<R)= 0.94376103 |
| R= 0.32 | PR(RR<R)= 0.32433385 | R= 0.82 | PR(RR<R)= 0.94933525 |
| R= 0.33 | PR(RR<R)= 0.34396478 | R= 0.83 | PR(RR<R)= 0.95463164 |
| R= 0.34 | PR(RR<R)= 0.36388428 | R= 0.84 | PR(RR<R)= 0.95964883 |
| R= 0.35 | PR(RR<R)= 0.38403528 | R= 0.85 | PR(RR<R)= 0.96438562 |
| R= 0.36 | PR(RR<R)= 0.40431513 | R= 0.86 | PR(RR<R)= 0.96884060 |
| R= 0.37 | PR(RR<R)= 0.42465226 | R= 0.87 | PR(RR<R)= 0.97301206 |
| R= 0.38 | PR(RR<R)= 0.44496870 | R= 0.88 | PR(RR<R)= 0.97689755 |
| R= 0.39 | PR(RR<R)= 0.46518543 | R= 0.89 | PR(RR<R)= 0.98049439 |
| R= 0.40 | PR(RR<R)= 0.48522284 | R= 0.90 | PR(RR<R)= 0.98380100 |
| R= 0.41 | PR(RR<R)= 0.50500189 | R= 0.91 | PR(RR<R)= 0.98681277 |
| R= 0.42 | PR(RR<R)= 0.52443908 | R= 0.92 | PR(RR<R)= 0.98952585 |
| R= 0.43 | PR(RR<R)= 0.54343506 | R= 0.93 | PR(RR<R)= 0.99193313 |
| R= 0.44 | PR(RR<R)= 0.56187984 | R= 0.94 | PR(RR<R)= 0.99404583 |
| R= 0.45 | PR(RR<R)= 0.57965752 | R= 0.95 | PR(RR<R)= 0.99584247 |
| R= 0.46 | PR(RR<R)= 0.59665508 | R= 0.96 | PR(RR<R)= 0.99732422 |
| R= 0.47 | PR(RR<R)= 0.61272741 | R= 0.97 | PR(RR<R)= 0.99848535 |
| R= 0.48 | PR(RR<R)= 0.62769789 | R= 0.98 | PR(RR<R)= 0.99932341 |
| R= 0.49 | PR(RR<R)= 0.64139334 | R= 0.99 | PR(RR<R)= 0.99982931 |
| R= 0.50 | PR(RR<R)= 0.65362863 | R= 1.00 | PR(RR<R)= 1.00000027 |

N= 6 KAPPA= 0.5

| | | | |
|---|---|---|---|
| R= 0.01 | F(R)= 0.00041513 | R= 0.51 | F(R)= 0.67319631 |
| R= 0.02 | F(R)= 0.00164522 | R= 0.52 | F(R)= 0.68918297 |
| R= 0.03 | F(R)= 0.00366040 | R= 0.53 | F(R)= 0.70489065 |
| R= 0.04 | F(R)= 0.00646411 | R= 0.54 | F(R)= 0.72030021 |
| R= 0.05 | F(R)= 0.01001308 | R= 0.55 | F(R)= 0.73539162 |
| R= 0.06 | F(R)= 0.01429715 | R= 0.56 | F(R)= 0.75014395 |
| R= 0.07 | F(R)= 0.01929923 | R= 0.57 | F(R)= 0.76453527 |
| R= 0.08 | F(R)= 0.02500322 | R= 0.58 | F(R)= 0.77854263 |
| R= 0.09 | F(R)= 0.03139384 | R= 0.59 | F(R)= 0.79214200 |
| R= 0.10 | F(R)= 0.03845663 | R= 0.60 | F(R)= 0.80530821 |
| R= 0.11 | F(R)= 0.04617780 | R= 0.61 | F(R)= 0.81801489 |
| R= 0.12 | F(R)= 0.05454416 | R= 0.62 | F(R)= 0.83023443 |
| R= 0.13 | F(R)= 0.06354302 | R= 0.63 | F(R)= 0.84193791 |
| R= 0.14 | F(R)= 0.07316207 | R= 0.64 | F(R)= 0.85309503 |
| R= 0.15 | F(R)= 0.08338932 | R= 0.65 | F(R)= 0.86367404 |
| R= 0.16 | F(R)= 0.09421295 | R= 0.66 | F(R)= 0.87364171 |
| R= 0.17 | F(R)= 0.10562120 | R= 0.67 | F(R)= 0.88296651 |
| R= 0.18 | F(R)= 0.11760225 | R= 0.68 | F(R)= 0.89170766 |
| R= 0.19 | F(R)= 0.13014410 | R= 0.69 | F(R)= 0.89995366 |
| R= 0.20 | F(R)= 0.14323437 | R= 0.70 | F(R)= 0.90774870 |
| R= 0.21 | F(R)= 0.15686017 | R= 0.71 | F(R)= 0.91512328 |
| R= 0.22 | F(R)= 0.17100791 | R= 0.72 | F(R)= 0.92210082 |
| R= 0.23 | F(R)= 0.18566303 | R= 0.73 | F(R)= 0.92870330 |
| R= 0.24 | F(R)= 0.20080978 | R= 0.74 | F(R)= 0.93493761 |
| R= 0.25 | F(R)= 0.21643089 | R= 0.75 | F(R)= 0.94082641 |
| R= 0.26 | F(R)= 0.23250723 | R= 0.76 | F(R)= 0.94637864 |
| R= 0.27 | F(R)= 0.24901725 | R= 0.77 | F(R)= 0.95160489 |
| R= 0.28 | F(R)= 0.26593646 | R= 0.78 | F(R)= 0.95651475 |
| R= 0.29 | F(R)= 0.28323654 | R= 0.79 | F(R)= 0.96111692 |
| R= 0.30 | F(R)= 0.30088417 | R= 0.80 | F(R)= 0.96541349 |
| R= 0.31 | F(R)= 0.31883915 | R= 0.81 | F(R)= 0.96943001 |
| R= 0.32 | F(R)= 0.33705115 | R= 0.82 | F(R)= 0.97315564 |
| R= 0.33 | F(R)= 0.35545195 | R= 0.83 | F(R)= 0.97660326 |
| R= 0.34 | F(R)= 0.37392255 | R= 0.84 | F(R)= 0.97977955 |
| R= 0.35 | F(R)= 0.39236191 | R= 0.85 | F(R)= 0.98269111 |
| R= 0.36 | F(R)= 0.41075588 | R= 0.86 | F(R)= 0.98534450 |
| R= 0.37 | F(R)= 0.42909349 | R= 0.87 | F(R)= 0.98774640 |
| R= 0.38 | F(R)= 0.44736365 | R= 0.88 | F(R)= 0.98990362 |
| R= 0.39 | F(R)= 0.46555312 | R= 0.89 | F(R)= 0.99182324 |
| R= 0.40 | F(R)= 0.48365647 | R= 0.90 | F(R)= 0.99351271 |
| R= 0.41 | F(R)= 0.50165598 | R= 0.91 | F(R)= 0.99497935 |
| R= 0.42 | F(R)= 0.51954163 | R= 0.92 | F(R)= 0.99623352 |
| R= 0.43 | F(R)= 0.53730106 | R= 0.93 | F(R)= 0.99728271 |
| R= 0.44 | F(R)= 0.55492149 | R= 0.94 | F(R)= 0.99813765 |
| R= 0.45 | F(R)= 0.57238971 | R= 0.95 | F(R)= 0.99881049 |
| R= 0.46 | F(R)= 0.58969204 | R= 0.96 | F(R)= 0.99931381 |
| R= 0.47 | F(R)= 0.60681423 | R= 0.97 | F(R)= 0.99966313 |
| R= 0.48 | F(R)= 0.62374150 | R= 0.98 | F(R)= 0.99987682 |
| R= 0.49 | F(R)= 0.64045843 | R= 0.99 | F(R)= 0.99997613 |
| R= 0.50 | F(R)= 0.65694896 | R= 1.00 | F(R)= 1.00000019 |

N= 7 KAPPA= 0.5

| | |
|---|---|
| R= 0.01 | F(R)= 0.00041336 |
| R= 0.02 | F(R)= 0.00166129 |
| R= 0.03 | F(R)= 0.00373729 |
| R= 0.04 | F(R)= 0.00664247 |
| R= 0.05 | F(R)= 0.01037551 |
| R= 0.06 | F(R)= 0.01493446 |
| R= 0.07 | F(R)= 0.02031665 |
| R= 0.08 | F(R)= 0.02651845 |
| R= 0.09 | F(R)= 0.03353495 |
| R= 0.10 | F(R)= 0.04135962 |
| R= 0.11 | F(R)= 0.04998373 |
| R= 0.12 | F(R)= 0.05939563 |
| R= 0.13 | F(R)= 0.06957957 |
| R= 0.14 | F(R)= 0.08051345 |
| R= 0.15 | F(R)= 0.09216194 |
| R= 0.16 | F(R)= 0.10447801 |
| R= 0.17 | F(R)= 0.11742487 |
| R= 0.18 | F(R)= 0.13097093 |
| R= 0.19 | F(R)= 0.14508707 |
| R= 0.20 | F(R)= 0.15974567 |
| R= 0.21 | F(R)= 0.17492018 |
| R= 0.22 | F(R)= 0.19058426 |
| R= 0.23 | F(R)= 0.20671260 |
| R= 0.24 | F(R)= 0.22327951 |
| R= 0.25 | F(R)= 0.24025938 |
| R= 0.26 | F(R)= 0.25762634 |
| R= 0.27 | F(R)= 0.27535407 |
| R= 0.28 | F(R)= 0.29341563 |
| R= 0.29 | F(R)= 0.31178331 |
| R= 0.30 | F(R)= 0.33042343 |
| R= 0.31 | F(R)= 0.34932123 |
| R= 0.32 | F(R)= 0.36843000 |
| R= 0.33 | F(R)= 0.38772399 |
| R= 0.34 | F(R)= 0.40716722 |
| R= 0.35 | F(R)= 0.42672422 |
| R= 0.36 | F(R)= 0.44635092 |
| R= 0.37 | F(R)= 0.46602503 |
| R= 0.38 | F(R)= 0.48568573 |
| R= 0.39 | F(R)= 0.50529377 |
| R= 0.40 | F(R)= 0.52480063 |
| R= 0.41 | F(R)= 0.54415518 |
| R= 0.42 | F(R)= 0.56330214 |
| R= 0.43 | F(R)= 0.58218340 |
| R= 0.44 | F(R)= 0.60075002 |
| R= 0.45 | F(R)= 0.61898625 |
| R= 0.46 | F(R)= 0.63686171 |
| R= 0.47 | F(R)= 0.65442582 |
| R= 0.48 | F(R)= 0.67160779 |
| R= 0.49 | F(R)= 0.68841006 |
| R= 0.50 | F(R)= 0.70484129 |
| R= 0.51 | F(R)= 0.72087042 |
| R= 0.52 | F(R)= 0.73649265 |
| R= 0.53 | F(R)= 0.75169652 |
| R= 0.54 | F(R)= 0.76647052 |
| R= 0.55 | F(R)= 0.78080316 |
| R= 0.56 | F(R)= 0.79468301 |
| R= 0.57 | F(R)= 0.80809881 |
| R= 0.58 | F(R)= 0.82103948 |
| R= 0.59 | F(R)= 0.83349429 |
| R= 0.60 | F(R)= 0.84545292 |
| R= 0.61 | F(R)= 0.85690563 |
| R= 0.62 | F(R)= 0.86784339 |
| R= 0.63 | F(R)= 0.87825807 |
| R= 0.64 | F(R)= 0.88814271 |
| R= 0.65 | F(R)= 0.89749174 |
| R= 0.66 | F(R)= 0.90630138 |
| R= 0.67 | F(R)= 0.91457006 |
| R= 0.68 | F(R)= 0.92229905 |
| R= 0.69 | F(R)= 0.92949328 |
| R= 0.70 | F(R)= 0.93616272 |
| R= 0.71 | F(R)= 0.94232472 |
| R= 0.72 | F(R)= 0.94801159 |
| R= 0.73 | F(R)= 0.95327313 |
| R= 0.74 | F(R)= 0.95814452 |
| R= 0.75 | F(R)= 0.96265129 |
| R= 0.76 | F(R)= 0.96681463 |
| R= 0.77 | F(R)= 0.97065297 |
| R= 0.78 | F(R)= 0.97418287 |
| R= 0.79 | F(R)= 0.97741950 |
| R= 0.80 | F(R)= 0.98037701 |
| R= 0.81 | F(R)= 0.98306876 |
| R= 0.82 | F(R)= 0.98550754 |
| R= 0.83 | F(R)= 0.98770569 |
| R= 0.84 | F(R)= 0.98967526 |
| R= 0.85 | F(R)= 0.99142809 |
| R= 0.86 | F(R)= 0.99297592 |
| R= 0.87 | F(R)= 0.99433045 |
| R= 0.88 | F(R)= 0.99550341 |
| R= 0.89 | F(R)= 0.99650606 |
| R= 0.90 | F(R)= 0.99735220 |
| R= 0.91 | F(R)= 0.99805227 |
| R= 0.92 | F(R)= 0.99861937 |
| R= 0.93 | F(R)= 0.99906033 |
| R= 0.94 | F(R)= 0.99940037 |
| R= 0.95 | F(R)= 0.99965310 |
| R= 0.96 | F(R)= 0.99982064 |
| R= 0.97 | F(R)= 0.99992361 |
| R= 0.98 | F(R)= 0.99997719 |
| R= 0.99 | F(R)= 0.99999726 |
| R= 1.00 | F(R)= 1.00000010 |

N= 8 KAPPA= 0.5

| | | | |
|---|---|---|---|
| R= 0.01 | F(R)= 0.00046463 | R= 0.51 | F(R)= 0.75909180 |
| R= 0.02 | F(R)= 0.00185597 | R= 0.52 | F(R)= 0.77437724 |
| R= 0.03 | F(R)= 0.00416798 | R= 0.53 | F(R)= 0.78911395 |
| R= 0.04 | F(R)= 0.00739246 | R= 0.54 | F(R)= 0.80329872 |
| R= 0.05 | F(R)= 0.01151970 | R= 0.55 | F(R)= 0.81692870 |
| R= 0.06 | F(R)= 0.01653880 | R= 0.56 | F(R)= 0.83000149 |
| R= 0.07 | F(R)= 0.02243791 | R= 0.57 | F(R)= 0.84251521 |
| R= 0.08 | F(R)= 0.02920434 | R= 0.58 | F(R)= 0.85446863 |
| R= 0.09 | F(R)= 0.03682462 | R= 0.59 | F(R)= 0.86586120 |
| R= 0.10 | F(R)= 0.04528452 | R= 0.60 | F(R)= 0.87669321 |
| R= 0.11 | F(R)= 0.05456897 | R= 0.61 | F(R)= 0.88696586 |
| R= 0.12 | F(R)= 0.06466203 | R= 0.62 | F(R)= 0.89668140 |
| R= 0.13 | F(R)= 0.07554673 | R= 0.63 | F(R)= 0.90584325 |
| R= 0.14 | F(R)= 0.08720517 | R= 0.64 | F(R)= 0.91445610 |
| R= 0.15 | F(R)= 0.09961785 | R= 0.65 | F(R)= 0.92252611 |
| R= 0.16 | F(R)= 0.11276400 | R= 0.66 | F(R)= 0.93006099 |
| R= 0.17 | F(R)= 0.12662114 | R= 0.67 | F(R)= 0.93707022 |
| R= 0.18 | F(R)= 0.14116483 | R= 0.68 | F(R)= 0.94356520 |
| R= 0.19 | F(R)= 0.15636843 | R= 0.69 | F(R)= 0.94955942 |
| R= 0.20 | F(R)= 0.17220284 | R= 0.70 | F(R)= 0.95506868 |
| R= 0.21 | F(R)= 0.18863613 | R= 0.71 | F(R)= 0.96011126 |
| R= 0.22 | F(R)= 0.20563319 | R= 0.72 | F(R)= 0.96470821 |
| R= 0.23 | F(R)= 0.22315536 | R= 0.73 | F(R)= 0.96888351 |
| R= 0.24 | F(R)= 0.24116003 | R= 0.74 | F(R)= 0.97266437 |
| R= 0.25 | F(R)= 0.25960011 | R= 0.75 | F(R)= 0.97608153 |
| R= 0.26 | F(R)= 0.27842487 | R= 0.76 | F(R)= 0.97916827 |
| R= 0.27 | F(R)= 0.29758769 | R= 0.77 | F(R)= 0.98195306 |
| R= 0.28 | F(R)= 0.31704699 | R= 0.78 | F(R)= 0.98445878 |
| R= 0.29 | F(R)= 0.33676339 | R= 0.79 | F(R)= 0.98670555 |
| R= 0.30 | F(R)= 0.35669874 | R= 0.80 | F(R)= 0.98871171 |
| R= 0.31 | F(R)= 0.37681555 | R= 0.81 | F(R)= 0.99049425 |
| R= 0.32 | F(R)= 0.39707672 | R= 0.82 | F(R)= 0.99206920 |
| R= 0.33 | F(R)= 0.41744524 | R= 0.83 | F(R)= 0.99345174 |
| R= 0.34 | F(R)= 0.43788406 | R= 0.84 | F(R)= 0.99465643 |
| R= 0.35 | F(R)= 0.45835594 | R= 0.85 | F(R)= 0.99569728 |
| R= 0.36 | F(R)= 0.47882335 | R= 0.86 | F(R)= 0.99658782 |
| R= 0.37 | F(R)= 0.49924840 | R= 0.87 | F(R)= 0.99734120 |
| R= 0.38 | F(R)= 0.51959279 | R= 0.88 | F(R)= 0.99797021 |
| R= 0.39 | F(R)= 0.53981784 | R= 0.89 | F(R)= 0.99848731 |
| R= 0.40 | F(R)= 0.55988449 | R= 0.90 | F(R)= 0.99890465 |
| R= 0.41 | F(R)= 0.57975336 | R= 0.91 | F(R)= 0.99923406 |
| R= 0.42 | F(R)= 0.59938483 | R= 0.92 | F(R)= 0.99948707 |
| R= 0.43 | F(R)= 0.61873925 | R= 0.93 | F(R)= 0.99967485 |
| R= 0.44 | F(R)= 0.63777707 | R= 0.94 | F(R)= 0.99980820 |
| R= 0.45 | F(R)= 0.65645921 | R= 0.95 | F(R)= 0.99989747 |
| R= 0.46 | F(R)= 0.67474738 | R= 0.96 | F(R)= 0.99995250 |
| R= 0.47 | F(R)= 0.69260466 | R= 0.97 | F(R)= 0.99998247 |
| R= 0.48 | F(R)= 0.70999624 | R= 0.98 | F(R)= 0.99999575 |
| R= 0.49 | F(R)= 0.72689053 | R= 0.99 | F(R)= 0.99999967 |
| R= 0.50 | F(R)= 0.74326114 | R= 1.00 | F(R)= 1.00000005 |

N= 9 KAPPA= 0.5

| | | | |
|---|---|---|---|
| R= 0.01 | F(R)= 0.00048720 | R= 0.51 | F(R)= 0.79015640 |
| R= 0.02 | F(R)= 0.00194818 | R= 0.52 | F(R)= 0.80303543 |
| R= 0.03 | F(R)= 0.00438105 | R= 0.53 | F(R)= 0.81527634 |
| R= 0.04 | F(R)= 0.00778262 | R= 0.54 | F(R)= 0.82687466 |
| R= 0.05 | F(R)= 0.01214823 | R= 0.55 | F(R)= 0.83782887 |
| R= 0.06 | F(R)= 0.01747163 | R= 0.56 | F(R)= 0.84811807 |
| R= 0.07 | F(R)= 0.02374478 | R= 0.57 | F(R)= 0.85777308 |
| R= 0.08 | F(R)= 0.03095755 | R= 0.58 | F(R)= 0.86679480 |
| R= 0.09 | F(R)= 0.03909746 | R= 0.59 | F(R)= 0.87519230 |
| R= 0.10 | F(R)= 0.04814925 | R= 0.60 | F(R)= 0.88297784 |
| R= 0.11 | F(R)= 0.05809454 | R= 0.61 | F(R)= 0.89016100 |
| R= 0.12 | F(R)= 0.06891132 | R= 0.62 | F(R)= 0.89675469 |
| R= 0.13 | F(R)= 0.08057490 | R= 0.63 | F(R)= 0.90277226 |
| R= 0.14 | F(R)= 0.09305938 | R= 0.64 | F(R)= 0.90822815 |
| R= 0.15 | F(R)= 0.10633793 | R= 0.65 | F(R)= 0.91313732 |
| R= 0.16 | F(R)= 0.12038272 | R= 0.66 | F(R)= 0.91751834 |
| R= 0.17 | F(R)= 0.13516493 | R= 0.67 | F(R)= 0.92138739 |
| R= 0.18 | F(R)= 0.15065459 | R= 0.68 | F(R)= 0.92476430 |
| R= 0.19 | F(R)= 0.16682056 | R= 0.69 | F(R)= 0.92766959 |
| R= 0.20 | F(R)= 0.18363030 | R= 0.70 | F(R)= 0.93012502 |
| R= 0.21 | F(R)= 0.20105008 | R= 0.71 | F(R)= 0.93215358 |
| R= 0.22 | F(R)= 0.21904426 | R= 0.72 | F(R)= 0.93377947 |
| R= 0.23 | F(R)= 0.23757576 | R= 0.73 | F(R)= 0.93502795 |
| R= 0.24 | F(R)= 0.25660563 | R= 0.74 | F(R)= 0.93592524 |
| R= 0.25 | F(R)= 0.27609307 | R= 0.75 | F(R)= 0.93649831 |
| R= 0.26 | F(R)= 0.29599328 | R= 0.76 | F(R)= 0.93677450 |
| R= 0.27 | F(R)= 0.31626748 | R= 0.77 | F(R)= 0.93678141 |
| R= 0.28 | F(R)= 0.33686286 | R= 0.78 | F(R)= 0.93654552 |
| R= 0.29 | F(R)= 0.35773264 | R= 0.79 | F(R)= 0.93609123 |
| R= 0.30 | F(R)= 0.37882623 | R= 0.80 | F(R)= 0.93543941 |
| R= 0.31 | F(R)= 0.40009143 | R= 0.81 | F(R)= 0.93460864 |
| R= 0.32 | F(R)= 0.42147487 | R= 0.82 | F(R)= 0.93361591 |
| R= 0.33 | F(R)= 0.44292272 | R= 0.83 | F(R)= 0.93247698 |
| R= 0.34 | F(R)= 0.46438201 | R= 0.84 | F(R)= 0.93120058 |
| R= 0.35 | F(R)= 0.48580329 | R= 0.85 | F(R)= 0.92981852 |
| R= 0.36 | F(R)= 0.50714062 | R= 0.86 | F(R)= 0.92832579 |
| R= 0.37 | F(R)= 0.52835007 | R= 0.87 | F(R)= 0.92674064 |
| R= 0.38 | F(R)= 0.54938318 | R= 0.88 | F(R)= 0.92507437 |
| R= 0.39 | F(R)= 0.57021667 | R= 0.89 | F(R)= 0.92333842 |
| R= 0.40 | F(R)= 0.59079233 | R= 0.90 | F(R)= 0.92154234 |
| R= 0.41 | F(R)= 0.61107691 | R= 0.91 | F(R)= 0.91969578 |
| R= 0.42 | F(R)= 0.63103223 | R= 0.92 | F(R)= 0.91780754 |
| R= 0.43 | F(R)= 0.65062113 | R= 0.93 | F(R)= 0.91588565 |
| R= 0.44 | F(R)= 0.66980706 | R= 0.94 | F(R)= 0.91393743 |
| R= 0.45 | F(R)= 0.68855717 | R= 0.95 | F(R)= 0.91196942 |
| R= 0.46 | F(R)= 0.70683651 | R= 0.96 | F(R)= 0.90998732 |
| R= 0.47 | F(R)= 0.72461424 | R= 0.97 | F(R)= 0.90799595 |
| R= 0.48 | F(R)= 0.74186091 | R= 0.98 | F(R)= 0.90599921 |
| R= 0.49 | F(R)= 0.75854935 | R= 0.99 | F(R)= 0.90399997 |
| R= 0.50 | F(R)= 0.77465502 | R= 1.00 | F(R)= 1.00000002 |

N=10 KAPPA= 0.5

| | | | |
|---|---|---|---|
| R= 0.01 | F(R)= 0.00051477 | R= 0.51 | F(R)= 0.81616688 |
| R= 0.02 | F(R)= 0.00205791 | R= 0.52 | F(R)= 0.83048033 |
| R= 0.03 | F(R)= 0.00462609 | R= 0.53 | F(R)= 0.84409843 |
| R= 0.04 | F(R)= 0.00821403 | R= 0.54 | F(R)= 0.85701569 |
| R= 0.05 | F(R)= 0.01281471 | R= 0.55 | F(R)= 0.86923049 |
| R= 0.06 | F(R)= 0.01841951 | R= 0.56 | F(R)= 0.88074512 |
| R= 0.07 | F(R)= 0.02501819 | R= 0.57 | F(R)= 0.89156589 |
| R= 0.08 | F(R)= 0.03259899 | R= 0.58 | F(R)= 0.90170309 |
| R= 0.09 | F(R)= 0.04114854 | R= 0.59 | F(R)= 0.91117093 |
| R= 0.10 | F(R)= 0.05065181 | R= 0.60 | F(R)= 0.91998714 |
| R= 0.11 | F(R)= 0.06109196 | R= 0.61 | F(R)= 0.92817224 |
| R= 0.12 | F(R)= 0.07245027 | R= 0.62 | F(R)= 0.93574816 |
| R= 0.13 | F(R)= 0.08470592 | R= 0.63 | F(R)= 0.94273747 |
| R= 0.14 | F(R)= 0.09783585 | R= 0.64 | F(R)= 0.94916338 |
| R= 0.15 | F(R)= 0.11181454 | R= 0.65 | F(R)= 0.95504975 |
| R= 0.16 | F(R)= 0.12661390 | R= 0.66 | F(R)= 0.96042102 |
| R= 0.17 | F(R)= 0.14220303 | R= 0.67 | F(R)= 0.96530227 |
| R= 0.18 | F(R)= 0.15854819 | R= 0.68 | F(R)= 0.96971911 |
| R= 0.19 | F(R)= 0.17561269 | R= 0.69 | F(R)= 0.97369764 |
| R= 0.20 | F(R)= 0.19335701 | R= 0.70 | F(R)= 0.97726441 |
| R= 0.21 | F(R)= 0.21173922 | R= 0.71 | F(R)= 0.98044627 |
| R= 0.22 | F(R)= 0.23071587 | R= 0.72 | F(R)= 0.98327027 |
| R= 0.23 | F(R)= 0.25024240 | R= 0.73 | F(R)= 0.98576356 |
| R= 0.24 | F(R)= 0.27027314 | R= 0.74 | F(R)= 0.98795315 |
| R= 0.25 | F(R)= 0.29076123 | R= 0.75 | F(R)= 0.98986576 |
| R= 0.26 | F(R)= 0.31165858 | R= 0.76 | F(R)= 0.99152761 |
| R= 0.27 | F(R)= 0.33291586 | R= 0.77 | F(R)= 0.99296408 |
| R= 0.28 | F(R)= 0.35448248 | R= 0.78 | F(R)= 0.99419947 |
| R= 0.29 | F(R)= 0.37630661 | R= 0.79 | F(R)= 0.99525664 |
| R= 0.30 | F(R)= 0.39833529 | R= 0.80 | F(R)= 0.99615659 |
| R= 0.31 | F(R)= 0.42051446 | R= 0.81 | F(R)= 0.99691807 |
| R= 0.32 | F(R)= 0.44278917 | R= 0.82 | F(R)= 0.99755757 |
| R= 0.33 | F(R)= 0.46510374 | R= 0.83 | F(R)= 0.99808989 |
| R= 0.34 | F(R)= 0.48740205 | R= 0.84 | F(R)= 0.99852844 |
| R= 0.35 | F(R)= 0.50962782 | R= 0.85 | F(R)= 0.99888550 |
| R= 0.36 | F(R)= 0.53172504 | R= 0.86 | F(R)= 0.99917226 |
| R= 0.37 | F(R)= 0.55363845 | R= 0.87 | F(R)= 0.99939894 |
| R= 0.38 | F(R)= 0.57531410 | R= 0.88 | F(R)= 0.99957486 |
| R= 0.39 | F(R)= 0.59670004 | R= 0.89 | F(R)= 0.99970846 |
| R= 0.40 | F(R)= 0.61774713 | R= 0.90 | F(R)= 0.99980732 |
| R= 0.41 | F(R)= 0.63840992 | R= 0.91 | F(R)= 0.99987825 |
| R= 0.42 | F(R)= 0.65864686 | R= 0.92 | F(R)= 0.99992722 |
| R= 0.43 | F(R)= 0.67841955 | R= 0.93 | F(R)= 0.99995946 |
| R= 0.44 | F(R)= 0.69769234 | R= 0.94 | F(R)= 0.99997940 |
| R= 0.45 | F(R)= 0.71643221 | R= 0.95 | F(R)= 0.99999081 |
| R= 0.46 | F(R)= 0.73460871 | R= 0.96 | F(R)= 0.99999659 |
| R= 0.47 | F(R)= 0.75219406 | R= 0.97 | F(R)= 0.99999906 |
| R= 0.48 | F(R)= 0.76916321 | R= 0.98 | F(R)= 0.99999984 |
| R= 0.49 | F(R)= 0.78549339 | R= 0.99 | F(R)= 0.99999998 |
| R= 0.50 | F(R)= 0.80116721 | R= 1.00 | F(R)= 0.99999997 |

CURRICULUM VITAE

von

Vassilios Papakonstantinou
aus Griechenland

In Arkadien bin ich geboren. Doch die Geburtszeit, am 21.10.1945 kurz nach dem Krieg, entsprach nicht der glücklichen und friedlichen Tradition der Arkadier Hirten. Hirt war mein erster Beruf, leider nur bis 1960, denn dann ging ich nach Athen, um das Gymnasium zu besuchen. Für die Sommerferien 1964 kam ich nach Zürich, um Deutsch zu lernen, denn mein Studienwunsch, die ETH, stand bereits fest. Ich war so stark von Zürich begeistert, dass ich beschloss, das Gymnasium hier zu beenden und anschliessend an der ETH zu studieren. Aber im Sommer 1965 wurde ich in die griechische Armee eingeladen. Mein Militärdienst dauerte fast drei Jahre.

Im Frühling 1968 kam ich wieder nach Zürich und besuchte weiter das Tagesgymnasium Juventus.

Im März 1970 legte ich, mit Erfolg, die Aufnahmeprüfung an der ETH ab. Leider durfte ich erst im Herbst 1970 mit dem Studium an der Abteilung für Mathematik und Physik beginnen.

Im Frühling 1975 schloss ich mit dem Diplom in der theoretischen Physik ab. Mein Diplomvater war Professor K. Hepp. Anschliessend fand ich eine Assistentenstelle am Institut für theoretische Physik, Universität Zürich.

Im April 1977 wechselte ich die Stelle und wurde Assistent in der Biomathematischen Abteilung des Mathematischen Instituts der Universität Zürich. An dieser Stelle arbeite ich bis heute. Unter der Leitung von Professor Dr. E. Batschelet, Leiter der Biomathematischen Abteilung, verfasste ich die vorliegende Dissertation.

Meine übrigen akademischen Lehrer sind die Professoren:

Mathematik: B. Eckmann, H. Föllmer, F. Hampel, P. Henrici, P. Hess, M. Jeger, M.A. Knus, J. Marti, A. Pfluger, E. Stiefel, K. Voss, C.A. Zehnder.

Chemie: R. Gut

Exp. Physik: H.J. Gerber, H. Gränicher, F. Heinrich, J. Lang, P. Marmier.

Theor. Physik: W. Baltensberger, M. Fierz, K. Hepp, W. Hunziker, G. Rasche, G. Scharf, C. Schmid, N. Straumann, A. Thellung.

Allen meinen Lehrern bin ich dankbar für das Wissen, das sie mir beigebracht haben.